基于Black-Litterman模型的量化配置研究

——量化技术系列研究之五

交易咨询资格号：
证监许可[2012]112

金融工程
专题报告

2024年2月27日

分析师

时翔宇
金融工程分析师
期货从业资格：F03104321
交易咨询从业证书：Z0019649
联系人：杨旸
期货从业资格：F03096114
联系人：杜思嘉
期货从业资格：F03103175
联系人：李开来
期货从业资格：F03124866
联系电话：021-61625026
E-mail：ztqh_sh@163.com
客服电话：400-618-6767
公司网址：
http://www.ztqh.com/

报告概述

- 本报告主要针对Black-Litterman模型的思想进行了详细分析。Black-Litterman模型作为传统均值方差模型的一个改进版本主要分为了两个步骤。首先，该模型通过一个“逆向最优化”的过程改善了传统均值方差模型使用历史数据估计预期收益率和协方差矩阵存在一定偏差的缺陷。随后，投资者可以通过贝叶斯方法将对市场的主观观点与“市场隐含”收益率相结合。
- 通过2019年4月30日至2024年1月31日的回测也发现如果将“逆向最优化”得到的预期收益率与协方差矩阵作为模型输入项所构建的组合比起传统均值方差模型所构建的组合更加稳定。但需要注意的是，在构建Black-Litterman模型时配置结果也会受到投资者个人的风险厌恶系数等外生参数的影响。
- **风险提示：**基于历史数据研究总结的相关规律未来可能存在失效的风险。

基于Black-Litterman模型的量化配置研究

——量化技术系列研究之五

一、均值方差模型的缺点

■ 上世纪五十年代马科维茨提出著名的均值方差模型正式开启了资产配置的量化时代。在均值方差模型中，投资者可以根据投资组合内资产收益率的期望及协方差矩阵来决定单个资产的配置权重。均值方差模型的数学表达式如下所示。

$$\max_{\boldsymbol{\omega}} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\mu}$$

$$s.t.\ \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} = \sigma_{target}^2$$

■ 其中$\boldsymbol{\omega}$表示权重向量，T 表示向量或矩阵的转置，$\boldsymbol{\mu}$为预期收益率向量，$\boldsymbol{\Sigma}$为协方差矩阵，σ_{target}^2表示目标波动率的平方。上式表示投资者可以在固定风险（以资产波动率来衡量）下通过调整组合内每个资产的配置权重使得投资组合获得最高的预期收益率。通过对上式的调整可以得到投资者效用函数，具体形式如下所示。

$$U = \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\mu} - \frac{\delta}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega}$$

■ 其中，U 为投资者的效用函数，δ为投资者的风险厌恶系数（一般情况下大于 0）。为求得效用函数的极大值，可在上式中对$\boldsymbol{\omega}$求导，并令一阶导数等于 0 得到投资组合配置权重的解，如下所示。

$$\frac{dU}{d\omega} = \boldsymbol{\mu} - \delta \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\omega} = 0 \quad ①$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}}{\delta} \quad ②$$

■ 其中，$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$表示协方差矩阵$\boldsymbol{\Sigma}$的逆矩阵。在均值方差模型的实务运用中，通常使用历史数据来近似计算得到$\widehat{\boldsymbol{\mu}}$和$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$，风险厌恶系数$\delta$的取值则由投资者对于风险的态度来决定。

■ 随着时间的推移，投资者在实际运用中发现均值方差模型主要存在两个问题。首先，使用均值方差模型得到的配置权重比较容易出现配置结果比较集中的情况，即将大部分的权重都集中配置到某一个资产上，而另几类资产的配置权重接近于 0。第二，该模型对于输入参数非常敏感，对参数的准确性要求非常高（这里的输入参数主要是指预期收益率与协方差矩阵）。

■ 本报告选取沪深 300 指数（000300.SH）、中证 1000 指数（000852.SH）、中债全债指数（H11001.CSI）和中证可转债及可交换债券指数（931078.CSI）作为投资标的，选取 2019 年 1 月 31 日至 2024 年 1 月 31 日共五年的月度指数数据作为历史数据，可估算得到四类资产的预期年化收益率分别为：1.68%、4.69%、4.82%和 4.46%。同时，给予权重总和为 1 以及不可为负（限制做空）两条限制，可估算得到配置权重的结果如图表 1 中的第二列所示。

■ 从图表 1 中的第二列可以看出，完全采用历史数据估算预期收益率和协方差矩阵得到的模型结果较为集中，模型将所有的权重配置在了债券和可转债两类资产上。

- 接下来保持其他数据不变，只将可转债的预期收益率提高 1%，可得到的配置权重结果如图表 1 中的第三列所示。从第三列中可以看出传统的均值方差模型将所有的权重均配置在了“可转债”上，其他三类资产的配置权重均为 0.00%，这似乎是不合理的。

图表 1：均值方差模型配置的权重

指数	权重 1	权重 2
沪深 300	0.00%	0.00%
中证 1000	0.00%	0.00%
中证可转债及可交换债券	30.48%	100.00%
中债全债	69.52%	0.00%

来源：同花顺 iFinD，中泰期货整理

- 图表 1 的结果与之前的论述较为一致，即均值方差模型对于输入参数较为敏感（模型的鲁棒性较差），并且很容易得到一个较为“极端”的组合。为了改善均值方差模型在实际中的运用，不同学者提出了不同的解决方法。其中 Black-Litterman 模型是一种从市场组合出发，得到各个资产的市场隐含预期收益率并将此收益率与投资者主观观点相结合的方法。它既改善了输入变量难以估计的问题，又可以将投资者的主观观点加入到配置权重结果中，故在实际中被很多投资者广泛运用。
- 该方法主要可以分为两步。首先，通过“逆向最优化”得到市场中蕴含的隐性预期收益率和协方差矩阵。第二，将投资者的主观观点对第一步中得到的预期收益率进行适当修正。以下对这两步分别进行详细讲解。

二、逆向最优化的原理

- 投资者在建立投资组合时通常对投资组合的收益率采用“正态性”假设，即：

$$\boldsymbol{r} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

- 其中，**r** 为资产的收益率列向量，$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\Sigma}$分别为多元正态分布的两个参数——均值和反差。根据上一部分的分析可知，在传统的均值方差模型中，通常采用历史数据计算得到的$\hat{\boldsymbol{\mu}}$和$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$来对$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\Sigma}$进行估计。在 Black-Litterman 模型中将收益率的期望$\boldsymbol{\mu}$也设定为一个服从正态分布的随机变量，即

$$\boldsymbol{\mu} \sim N(\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\Pi}}) \quad ③$$

- 其中，$\boldsymbol{\Pi}$和$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\Pi}}$为$\boldsymbol{\mu}$的期望和方差。我们可以将以上两个分布进行推导得到：

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_1$$
$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\varepsilon}_2$$
$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\Pi}})$$

- 再结合$\boldsymbol{\Pi}$与$\boldsymbol{\varepsilon}_1$和$\boldsymbol{\varepsilon}_2$不相关可推得：

$$\boldsymbol{r} \sim N(\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\Pi}})$$

- Fischer Black 和 Robert Litterman(1992)将$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\Pi}}$表示为$\tau \cdot \boldsymbol{\Sigma}$。其中$\tau$是一个接近于 0 的正数，原因为$\boldsymbol{\Sigma}$是收益率的方差，而$\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\Pi}}$是收益率均值的方差，后者的不确定性应该明显低于前者。经过整理最终可得收益率服从以下正态分布。

$$\boldsymbol{r} \sim N(\boldsymbol{\Pi}, (1+\tau)\cdot\boldsymbol{\Sigma})$$

- 从以上的分布参数中可以看出，当τ取值较大时如果只使用历史数据来估算收益率和协方差矩阵可能存在一定的风险。自此当投资者对于市场并没有主观观点时可以将$\boldsymbol{\Pi}$和$(1+\tau)\cdot\boldsymbol{\Sigma}$替代②式中的$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\Sigma}$得到权重的结果。其中$\boldsymbol{\Sigma}$可使用历史数据进行估计得到的$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$来替代，接下来解释$\boldsymbol{\Pi}$的计算。
- Black-Litterman 模型认为当投资者对于市场不存在主观观点时，可采用市场组合（在 CAPM 模型中的资产市场线与有效前沿的切点即为“市场组合”，当持有市场组合时拥有最大的夏普比率且充分分散了单一资产的特质性风险）中各类资产的预期收益率作为$\boldsymbol{\Pi}$的估计。根据①式可以得到：

$$\widehat{\boldsymbol{\Pi}} = \delta_{mkt}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\omega_{mkt}}$$

- 其中，$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}$表示$\boldsymbol{\Pi}$的估计值，$\delta_{mkt}$和$\boldsymbol{\omega_{mkt}}$分别表示市场平均风险厌恶系数和市场组合的权重。需要注意的是δ_{mkt}和δ以及$\boldsymbol{\omega_{mkt}}$和$\boldsymbol{\omega}$是完全不同的。前者代表了市场总体的情况，而后者代表了构建投资组合的投资者的个人情况。当投资者持有市场组合时，$\boldsymbol{\omega_{mkt}}$为可用各类资产的市值权重来替代。

三、Black-Litterman 模型的构建

- 根据本报告上一部分的分析可知，当投资者对于市场上的预期收益率没有主观观点时，可计算得到资产的预期收益率向量估计值$\widehat{\boldsymbol{\Pi}}$和协方差矩阵估计值$(1+\tau)\cdot\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$并结合投资者个人的风险厌恶系数$\delta$得到配置权重结果。而当投资者对于未来市场有主观观点时，则需要考虑将主观观点与市场隐含预期收益率相结合得到一个新的预期收益率分布。Black-Litterman 模型中投资者的主观观点可以由以下等式进行建立。

$$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

- 其中，**P** 为一个$n \times k$的矩阵，其中 n 为主观观点的个数，k 为投资组合中的资产个数，在每一个行中，有观点涉及的位置元素为非零，其余位置元素为零。$\boldsymbol{\mu}$为预期收益率向量，**Q** 为观点结果列向量，$\boldsymbol{\varepsilon}$为残差列向量，与 **Q** 不相关,且服从以下分布。

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}(0, \boldsymbol{\Omega})$$

- 其中，$\boldsymbol{\Omega}$为$\boldsymbol{\varepsilon}$的协方差矩阵，由于一般认为各个主观观点之间互相独立，故$\boldsymbol{\Omega}$是一个对角阵。在实务中对于$\boldsymbol{\Omega}$的计算方法并不唯一，本报告介绍 Guangliang He 和 Robert Litterman（2002）提到的方法。以下可用一个假设的例子来说明建模过程及各个参数的计算方法。
- 假设一个投资者投资于 a，b 和 c 三个资产。有两个主观观点如下：
- 观点一：该投资者认为 a 资产的预期收益率为 10%。（置信水平为$\frac{1}{\gamma_1}$）
- 观点二：b 资产的预期收益率比 c 资产高 1%。（置信水平为$\frac{1}{\gamma_2}$）
- 那么根据上述两个观点可以得到 **P** 和 **Q** 矩阵分别为：

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 10\% \\ 1\% \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

- 因为投资者有两个主观观点，投资者的组合中有三个资产，故 **P** 矩阵是一个 2 行 3 列的矩阵。第一个观点是一个“绝对”观点，直接给出了 a

资产的预期收益率数值，故 **P** 矩阵第一行的第一个元素为 1，其余元素为 0。第二个观点是一个“相对”观点，涉及到了 b 和 c 两个资产预期收益率的比较，故 **P** 矩阵第 2 行第 1 个元素为 0，第 2 和第 3 个元素分别为 1 和-1，**Q** 矩阵为观点结果，这两者的设置较为直接。Guangliang He 和 Robert Litterman（2002）认为$\boldsymbol{\Omega}$矩阵的对角元素应该满足以下关系：

$$\frac{\gamma_i}{\tau} = p_i \boldsymbol{\Sigma} p_i^T$$

- 其中，在本例中$i = 1,2$。γ_i为$\boldsymbol{\Omega}$矩阵对角线上的元素，依次用来表示每个主观观点的不确定性，p_i表示 **P** 矩阵的第i行元素。标量τ衡量预期市场隐含收益率的不确定性。
- Black-Litterman 模型是通过贝叶斯公式将主观观点与市场隐含预期收益率相结合的。首先，市场预期收益率的分布为先验分布，记为 A，即：

$$P(A) \sim N(\boldsymbol{\Pi}, \tau \cdot \boldsymbol{\Sigma})$$

- 其次，投资者的主观观点对预期收益率的进行了修正，记为 B，即：

$$P(B|A) \sim N(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\Omega})$$

- 最后，在投资者的主观观点下新的各资产预期收益率向量服从的概率分布可表示为$P(A|B)$。根据贝叶斯公式有：

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- 根据上式可推得新预期收益率$P(A|B)$的后验分布为：

$$\boldsymbol{\mu}' \sim N(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{S})$$

$$\boldsymbol{M} = [(\tau \cdot \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{P}]^{-1} \cdot [(\tau \cdot \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \cdot \boldsymbol{\Pi} + \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{Q}]$$

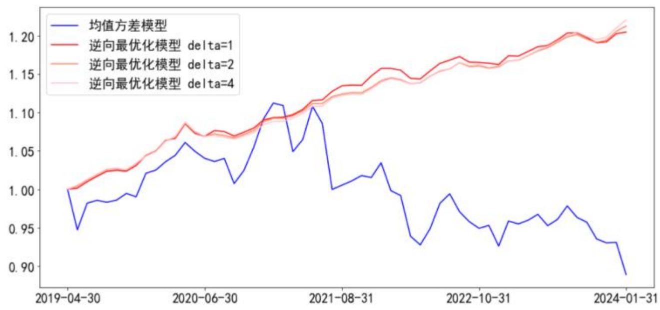
$$\boldsymbol{S} = [(\tau \cdot \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{P}]^{-1}$$

- 具体推导过程可参考本报告的附录。通过贝叶斯公式，Black-Litterman 模型将投资者的主观观点融合进了预期收益率的估计中，即修正了分布③，用$\boldsymbol{\mu}'$替代了$\boldsymbol{\mu}$。

四、传统均值方差模型与逆向最优化的回测结果

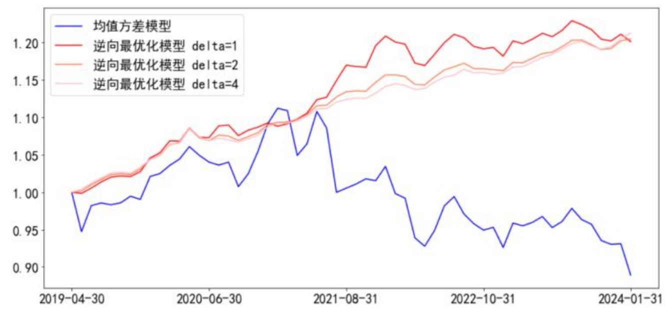
- 本报告选取沪深 300（000300.SH）、中证 1000（000852.SH）、中债全债（H11001.CSI）和中证可转债及可交换债券（931078.CSI）四个指数作为投资标的进行配置的回测研究，回测区间为 2019 年 4 月 30 日至 2024 年 1 月 31 日，历史数据窗口为 5 年(即 60 个月度收益率数据)，相关参数的选取参考本报告的附录。
- 由于 Black-Litterman 模型需要投资者的主观观点，故本报告采用逆向最优化的结果与普通的均值方差模型进行回测对比，投资者的风险厌恶系数（delta）分别取 1,2,和 4。具体回测结果如图表 2 和图表 3 所示。
- 从图表 2 和图表 3 中可以看出，采用逆向最优化结果的配置模型有更好的稳定性。在其他参数相同的情况下，投资者的风险厌恶系数越高，那么在低风险资产的配置权重将会越高，组合的回测净值相对来说会越平稳。

图表 2：均值方差模型与逆向最优化的回测结果对比（Tau=1）



来源：同花顺 iFinD，中泰期货整理

图表 3：均值方差模型与逆向最优化的回测结果对比（Tau=1/（T-k））



来源：同花顺 iFinD，中泰期货整理

五、结论

- 通过本报告的分析可以得出，Black-Litterman 模型一方面可以改善传统均值方差模型对于预期收益率和方差估计不准确的问题，另一方面可以将投资者的主观观点融合进配置结果中。建模过程主要分成两步，第一步为“逆向最优化”，通过寻找一个市场组合来反推出各个资产的市场隐含预期收益率与协方差矩阵。第二步通过贝叶斯方法将投资者的主观观点与市场隐含预期收益率相结合，起到一个修正的作用。
- 虽然该模型给出了一个预期收益率和协方差矩阵的合理估计方法，也可以使得投资者的主观观点得到体现，但在模型中的几个参数例如市场平均风险厌恶系数，标量 Tau 等的取值仍然较为主观且对模型结果有一定的影响。
- **风险提示：**基于历史数据研究总结的相关规律未来可能存在失效的风险。
- **参考文献：**

[1]Jay Walters. The Black-Litterman Model in Detail[R].SSRN Electronic Journal,July 2011.

[2]Fischer Black, Robert Litterman. Global Portfolio Optimization[J].Financial Analysts Journal,1992,48(5):28-43.

[3]Stephen Satchell, Alan Scowcroft.A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Portfolio Construction[J].Journal of Asset Management,2000,1:138-150.

[4]Guangliang He, Robert Litterman. The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios[R].SSRN Electronic Journal,October 2002.

附 录

1. 在本报告第三部分中关于预期收益率的后验分布推导过程如下：
根据贝叶斯公式有：

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$$

其中，$P(A|B)$表示预期收益率的后验分布，即在主观观点修正后的预期收益率分布，也是需要求解的项。$P(A)$为预期收益率的先验分布，即本报告中提到的市场隐含预期收益率。$P(B|A)$为已知市场隐含预期收益率的先验分布后，投资者提出的主观观点所服从的分布。$P(B)$为主观观点的概率分布，在此处为一个不变的常数。以下根据$P(A)$和$P(B|A)$的分布情况，推导得到$P(A|B)$的概率分布情况。

（1）预期收益率的先验分布是已知的，即

$$\boldsymbol{\mu}\sim N(\boldsymbol{\Pi},\boldsymbol{\Sigma_{\Pi}})$$

其中，$\boldsymbol{\Sigma_{\Pi}}=\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma}$，故先验分布还可以表示为：

$$\boldsymbol{\mu}\sim N(\boldsymbol{\Pi},\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})$$

（2）已知预期收益率的先验分布后，投资者提出的主观观点所服从的概率分布$P(B|A)$也是已知的，即

$$P(B|A)\sim N(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{\Omega})$$

根据多维正态分布的概率密度函数可得：

$$P(A)\propto exp\{-\frac{1}{2}\cdot(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\Pi})^T\cdot(\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\cdot(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\Pi})\}$$

$$P(B|A)\propto exp\{-\frac{1}{2}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{Q})^T\cdot\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{Q})\}$$

其中，$\propto$表示正比，根据贝叶斯公式有：

$$P(A|B)\propto exp\{-\frac{1}{2}\cdot(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\Pi})^T\cdot(\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\cdot(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{\Pi})-\frac{1}{2}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{Q})^T\cdot\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{Q})\}$$

上式经过整理有：

$$P(A|B)\propto exp\{-\tfrac{1}{2}\cdot\boldsymbol{\mu^T}\cdot[(\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P^T}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}]\cdot\boldsymbol{\mu}+\tfrac{1}{2}\cdot\boldsymbol{\mu^T}\cdot[(\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\cdot\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{P^T}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}]+\tfrac{1}{2}\cdot[\boldsymbol{\Pi^T}\cdot(\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{Q^T}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}]\cdot\boldsymbol{\mu}\} \quad ④$$

若

$$P(A|B)\sim N(\boldsymbol{M},\boldsymbol{S})$$

其中，$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{S}$为$P(A|B)$的期望和方差，则有

$$P(A|B)\propto exp\{-\frac{1}{2}\cdot(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{M})^T\cdot(\boldsymbol{S})^{-1}\cdot(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{M})\}$$

$$P(A|B)\propto exp\{-\tfrac{1}{2}\cdot\boldsymbol{\mu^T}\cdot\boldsymbol{S^{-1}}\cdot\boldsymbol{\mu}+\tfrac{1}{2}\cdot\boldsymbol{\mu^T}\cdot\boldsymbol{S^{-1}}\cdot\boldsymbol{M}+\tfrac{1}{2}\cdot\boldsymbol{M^T}\cdot\boldsymbol{S^{-1}}\cdot\boldsymbol{\mu}\} \quad ⑤$$

比较④式和⑤式可得

$$\boldsymbol{S}=[(\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P^T}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}]^{-1}$$
$$\boldsymbol{S^{-1}}\cdot\boldsymbol{M}=(\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\cdot\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{P^T}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}$$
$$\boldsymbol{M^T}\cdot\boldsymbol{S^{-1}}=\boldsymbol{\Pi^T}\cdot(\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{Q^T}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}$$

从以上三式求解得到

$$\boldsymbol{M}=[(\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P^T}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}]^{-1}\cdot[(\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\cdot\boldsymbol{\Pi}+\boldsymbol{P^T}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}]$$
$$\boldsymbol{S}=[(\tau\cdot\boldsymbol{\Sigma})^{-1}+\boldsymbol{P^T}\cdot\boldsymbol{\Omega}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}]^{-1}$$

综上所述，可以得到本报告第三部分中的$\boldsymbol{\mu}'$分布结果。

2. 在本报告的第四部分中的参数选取规则如下。

（1）市场平均风险厌恶系数δ_{mkt}：

根据本报告②式进行整理，若无风险收益率为 0，则有

$$\delta_{mkt}=\frac{E(R_M)}{\sigma_M^2}=\frac{\frac{E(R_M)}{\sigma_M}}{\sigma_M}=\frac{Sharpe\ Ratio\ of\ the\ Market\ Portfolio}{\sigma_M}$$

其中，$E(R_M)$为市场组合的预期收益率，σ_M为市场组合的波动率。市场平均风险厌恶系数δ_{mkt}可以用如下方法进行计算：（a）市场组合的预期收益率与波动率平方的比值。（b）市场组合的夏普比率与市场组合波动率的比值。Guangliang He 和 Robert Litterman（2002）采用$\delta_{mkt}=2.5$，本报告选取$\delta_{mkt}=2$。

（2）标量τ（Tau）

对于τ的取值，Fischer Black 和 Robert Litterman(1992)指出，因为变量均值的方差应该小于变量的方差，故τ应该是一个接近于 0 的数。Stephen Satchell 和 Alan Scowcroft(2000)认为τ可以取 1。Jay Walters(2011)提到估计的不确定性应该与选择的样本数量成反比，假设选定的历史数据长度为 T 期，配置资产的数量为 k 个，那么τ的估计值可以为

$$\tau=\frac{1}{T-k}\text{或}\tau=\frac{1}{T}$$

本报告分别选取$\tau=1$和$\tau=\frac{1}{T-k}$。

免责声明：

中泰期货股份有限公司（以下简称本公司）具有中国证券监督管理委员会批准的期货交易咨询业务资格（证监许可〔2012〕112）。本报告仅限本公司客户使用。

本公司不会因接收人收到本报告而视其为客户。在任何情况下，本报告中的信息或所表述的意见并不构成对任何人的交易建议，本公司不对任何人因使用本报告中的内容所导致的损失负任何责任。市场有风险，投资需谨慎。

本报告所载的资料、观点及预测均反映了本公司在最初发布该报告当日分析师的判断，是基于本公司分析师认为可靠且已公开的信息，本公司力求但不保证这些信息的准确性和完整性，也不保证文中观点或陈述不会发生任何变更，在不同时期，本公司可在不发出通知的情况下发出与本报告所载资料、意见及推测不一致的报告，亦可因使用不同假设和标准、采用不同观点和分析方法而与本公司其他业务部门、单位或附属机构在制作类似的其他材料时所给出的意见不同或者相反。本公司并不承担提示本报告的收件人注意该等材料的责任。