

如何进行有效的 Delta 对冲

方正中期研究院 牛秋乐

摘要:

在现实交易中,由于市场是非完美的,当前期权隐含波动率并不能完全反应未来标的资产的价格走势。假设我们能完美的预测未来实际波动率大小,但简单的买跨式和卖跨式策略仍经常会造成损失。而 delta 对冲能较好解决上述问题。但对于使用未来实际波动率进行 delta 对冲,还是利用隐含波动率进行 delta 对冲,也会造成两种不同的结果。本文主要从理论上对 delta 两种对冲方式进行推导并举例。

实际波动率和隐含波动率

实际波动率反映了股价真实波动的情况,只有发生以后,才可进行测量。而隐含波动率反映的是目前期权市场对未来标的走势的预期。由于市场是不完美的,因此这两个往往会存在一定的差异。比如若认为未来实际波动率要比隐含波动率大,即未来标的资产会发生大幅度的波动,则可以买入跨式或宽跨式组合。但投资者在现实交易中,经常会遇到这样一个问题,即上述策略有很大的风险。虽然投资者预测对了未来的大波动,但有时候仍会亏钱。除非能重复进行这个策略很多次,不然很有可能会蒙受巨额损失。因为,即使投资者预测对了未来的大波动,但标的在到期日,仍有可能在经历过山车之后,回归至起始点附近,那么投资者大概率还会发生亏损。即未来标的资产的高波动,并不能保证金标的资产运动轨迹会偏离起始点。

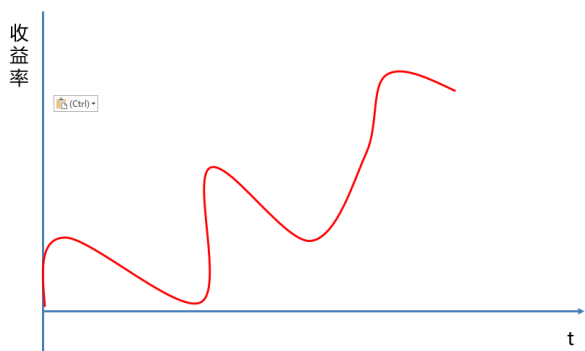


图 1: 标的高波动, 偏离起始点

资料来源: 方正中期研究院整理

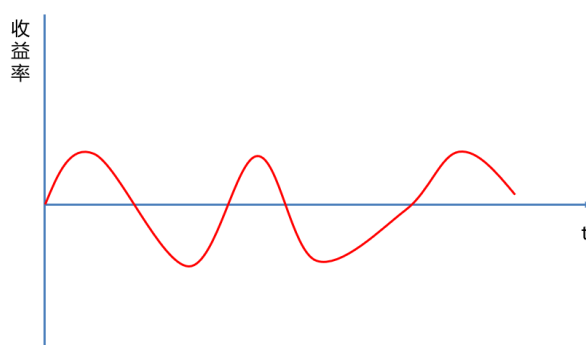


图 2: 标的高波动, 未偏离起始点

资料来源: 方正中期研究院整理

Delta 对冲

Delta 对冲可谓是衍生品理论的奠基石之一。它利用期权和标的资产对冲策略，理论上能消除所有方向性的风险。但我们知道 Delta 值是会随着行情不断发生改变，因此 Delta 对冲是一“动态”对冲，需要持续的监控，并频繁进行标的物买卖才能得以实现。由于现实交易中，会存在各种交易摩擦以及频繁交易，都将导致任何方式 Delta 对冲行为或多或少均会造成损失。尽管如此，Delta 对冲仍然是当前市场最具有活力的对冲方式。而对于上文提到的风险，我们就可以利用 delta 对冲来解决，从而获取更加稳定的收益。

由 Black-Scholes 公式推导可得

$$\Delta = N(d_1)$$

其中

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

S 表示标的资产价格；

K 表示执行价；

T 表示到期时间；

r 表示无风险收益率；

σ 表示波动率。

在上面的公式中，我们可以发现，除了 σ 以外，均可以确定具体取值。但与期权交易相关的波动率这么多，到底应该使用哪一个。假设我们预期未来实际波动率大于当前市场隐含波动率，下面我们用两个具体例子来剖析 Delta 对冲。

使用实际波动率进行 Delta 对冲

使用实际波动率进行对冲，显然就是通过期权市场构造一个正确定价的期权空头与多头进行对冲，从而进行获利。若 V 表示期权价值，则盈利应为

$$V(\sigma) - V(\tilde{\sigma})$$

其中 σ 为实际波动率， $\tilde{\sigma}$ 表示隐含波动率。

为方便起见，下文上标 i 均表示隐含指标，其余均表示实际指标。

假设标的资产价格满足几何随机布朗运动：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB_t$$

且有 Black-Scholes 方程：

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta - rV = 0$$

假设现有一期权 V^i ，我们通过 Δ 对冲构建一个资产组合。

则在当前时刻 t 有：

头寸	资产价值
期权	V^i
股票	$-\Delta S$
现金	$-V^i + \Delta S$

表 1：t 时刻头寸资产价格情况

资料来源：方正中期研究院整理

$t+dt$ 时刻有（不考虑分红情况）：

头寸	资产价值
期权	$V^i + dV^i$
股票	$-\Delta S - \Delta dS$
现金	$(-V^i + \Delta S)(1 + rdt)$

表 2：t + dt 时刻头寸资产价格情况

资料来源：方正中期研究院整理

因此，通过 delta 对冲，赚取的收益为

$$dV^i - \Delta dS - r(V^i - \Delta S)dt$$

此外，对于正确定价的期权 V ，则有

$$dV - \Delta dS - r(V - \Delta S)dt = 0$$

所以，通过 delta 对冲赚取的收益还可表示为

$$dV^i - dV - r(V^i - V)dt = e^{rt}d(e^{-rt}(V^i - V))$$

故有，从 t_0 时刻到期权到期日总利润为

$$e^{rt_0} \int_{t_0}^T d(e^{-rt}(V^i - V))dt = V - V^i$$

此外，对于 delta 对冲赚取的收益，我们还可进一步推导可得：

$$dV^i - dV - r(V^i - V)dt = \Theta^i dt + \Delta^i dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma^i dt - \Delta dS - r(V^i - \Delta S)dt$$

$$\begin{aligned}
&= \Theta^i dt + \mu S(\Delta^i - \Delta) dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma^i dt - r(V^i - V) dt \\
&\quad + (\Delta^i - \Delta) \sigma S dB_t \\
&= (\Delta^i - \Delta) \sigma S dB_t + \mu S(\Delta^i - \Delta) dt + \frac{1}{2} (\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) S^2 \Gamma^i dt \\
&= \frac{1}{2} (\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) S^2 \Gamma^i dt + (\Delta^i - \Delta) ((\mu - r) S dt + \sigma S dB_t)
\end{aligned}$$

从上面我们可以看到，由于实际波动率和隐含波动率差的存在。通过 **delta** 对冲，在到期日，投资者可以确保利润 $V - V^i$ 。但我们在更微观的层面上可以看到，由于 dB_t 这项的存在，利润获取不是稳定盈利的，而是随机的。即在最后到期日获取利润之前，投资者时而盈利，时而会发生亏损。因此从风险管理的角度来看，这种方式可能并不大理想。此外，对于实际波动率准确预测，对投资者而言，也提出了很大的要求。

使用隐含波动率进行 Delta 对冲

与上面操作类似，我们买入期权以后，通过隐含波动率进行 **Delta** 对冲，并将持有现金放入银行。则可以得到

$$\begin{aligned}
&dV^i - \Delta^i dS - r(V^i - \Delta^i S) dt \\
&= \Theta^i dt + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma^i dt - r(V^i - \Delta^i S) dt \\
&= \frac{1}{2} (\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) S^2 \Gamma^i dt
\end{aligned}$$

从上面的公式可以看到，通过隐含波动率的 **delta** 对冲，最后的利润中不包含 dB_t 这一不确定项，而是一个确定的值。很明显，这相比于用实际波动率对冲，优势更加明显，是一个更好的办法。而且运用隐含波动率进行对冲，我们根本不需要知道实际波动率到底是多少。只需要知道，若认为未来实际波动率比隐含波动率高，我们就可以买入；若认为未来实际波动率比隐含波动率低，我们就可以卖出。这对于投资者而言也更加友好，不需要预测未来实际率到底是多少，只需要判断实际波动率与当前隐含波动率的高低即可。

同样的，我们将通过隐含波动率对冲获得利润进行累加可得

$$\frac{1}{2} (\sigma^2 - \tilde{\sigma}^2) \int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)} S^2 \Gamma^i dt$$

显然上述结果恒为正值，但具有高度路径依赖，最终收益也会随着路径不同而有所变化，而不是一个确定的值。这与使用实际波动率进行 **delta** 对冲能获取固定收益 $V - V^i$ ，具有较大的差别。

下面我们用一个更为简单直观的例子，介绍利用隐含波动率进行 **Delta** 对冲的情况。

假设当前 50ETF 价格为 3.5。现有一看涨期权，执行价为 $K = 3.5$ ，波动率 $\sigma = 0.25$ ，剩余到期时间 $T = 30$ ，无风险利率 $r = 0.03$ 。

若投资者买入一份看涨期权，同时卖出 Delta 份标的对冲。

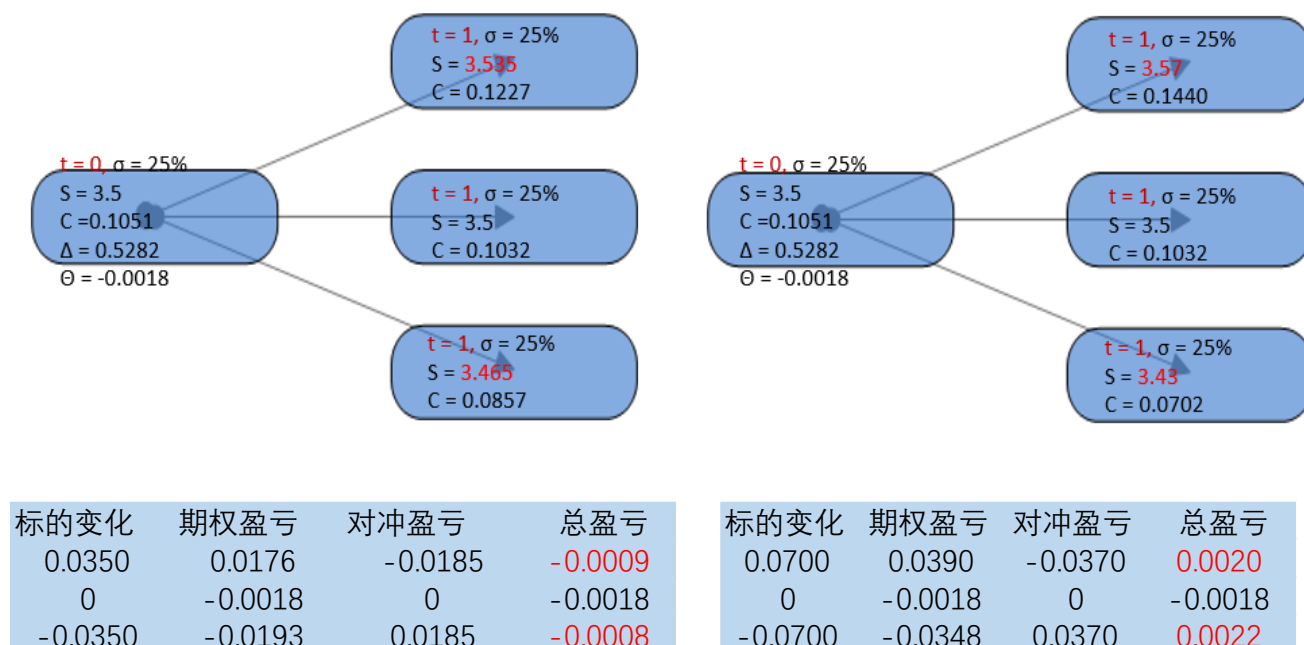


图 3：期权 Delta 中性对冲图解

资料来源：方正中期研究院整理

从图中可以得到，若标的波动 1%，无论标的上涨还是下跌，期权头寸加上对冲头寸最终都是负的。而当标的波动 2%，无论标的上涨还是下跌，期权头寸加上对冲头寸最终都是正的。虽然都是 Delta 中性对冲，但是标的波动幅度不同，一个是赚的，另一个却是亏的。这是什么原因？

事实上，从上文的分析中我们可以找到解释。由于当标的波动 1%，年化波动率为 $\sqrt{250} * 0.01 = 0.158$ ；当标的波动 2%，年化波动率为 $\sqrt{250} * 0.02 = 0.316$ 。期权隐含波动率为 0.25。当标的实际波动率大于隐含波动率时，通过 Delta 对冲我们就能获取盈利；而当标的实际波动率小于隐含波动率时，此时通过 Delta 对冲我们将亏损。

从上面这个例子中我们可以更加直观得到以下结论。即在通过期权隐含波动率进行 Delta 对冲过程中，当标的实际波动率大于期权隐含波动率，买期权（做多 Gamma）才能赚钱；而当标的实际波动率小于期权隐含波动率时，卖期权（做空 Gamma）才能获取收益。

总结

在实际交易过程中，由于市场非完备性，未来实际波动率与当前市场隐含波动率往往有所不同。若我们能较好预测未来实际波动率，则能通过期权市场赚取收益。但是简单买跨式或卖跨式策略仍有可能造成损失。而 Delta 中性对冲则能较好弥补这一劣势。

此外，通过实际波动率进行 Δ 对冲和通过隐含波动率进行 Δ 对冲，将会有不同的结果。利用实际波动率进行 Δ 对冲，在到期日之前收益有所波动。从风险管理的角度来看，该方式可能不尽如人意。另外，对于实际波动率准确预测，对投资者而言，也提出了很大的要求。但投资者可以确保最终利润，若从预期利润的角度来看，此方法或更为优异。

而通过隐含波动率进行 Δ 对冲，对投资者而言或更为友好，不需要预测未来实际率到底是多少，只需要判断实际波动率与当前隐含波动率的高低即可。若认为实际波动率高于隐含波动率，投资者就可以买期权（做多 Γ ）；若认为未来实际波动率低于隐含波动率，投资者就可以卖期权（做空 Γ ）。但该策略具有高度路径依赖，最终收益也会随着路径不同而有所变化，而不是一个确定的值。这与利用实际波动率进行 Δ 对冲有所不同。

总的来看，若以规避市场日常波动损益，使用隐含波动率 Δ 对冲或更为合适；而若以预期利润为目的，并有一定风险承受能力，或使用实际波动率 Δ 对冲更为合适。

行方正以致远

重要事项：

本报告中的信息均源于公开资料，仅作参考之用。方正中期研究院力求准确可靠，但对于信息的准确性及完备性不作任何保证，不管在何种情况下，本报告不构成个人投资建议，也没有考虑到个别客户特殊的投资目的、财务状况或需要，不能当作购买或出售报告中所提及的商品的依据。本报告未经方正中期研究院许可，不得转给其他人员，且任何引用、转载以及向第三方传播的行为均可能承担法律责任，方正中期期货有限公司不承担因根据本报告操作而导致的损失，敬请投资者注意可能存在的交易风险。本报告版权归方正中期所有。

行情预测说明：

涨：当周收盘价>上周收盘价；

跌：当周收盘价<上周收盘价；

震荡：（当周收盘价-上周收盘价）/上周收盘价的绝对值在 0.5%以内；

联系方式：

方正中期期货研究院

地址：北京市朝阳区东三环北路 38 号院 1 号楼泰康金融大厦 22 层

电话：010-85881117

传真：010-64636998

地址：长沙市芙蓉中路一段 372 号方正证券大厦四楼

电话：0731-84319306

传真：0731-85864807

邮编：410008
