

## 【量化专题】copula 模型及其应用

## 专题报告

### 摘要

- Copula 函数被称为“连接函数”，是在已知边缘分布情况下独立研究分布间关联关系的模型，可以与 GARCH 模型结合来描述多品种间收益率序列的波动及影响关系。本文简介了常用于时间序列模型的 Copula 函数，并使用期货指数数据进行建模与分析。
- 后续我们会对 Copula-GARCH 模型在配置策略中的应用进行研究。

作者姓名：姜慧丽

邮箱：jianghuili@csc.com.cn

电话：023-81157278

期货从业资格号：F3081375

期货投资咨询从业证书号：Z0018496

发布日期：2023 年 3 月 31 日

风险提示：本报告仅对模型作客观呈现，不具备任何投资建议。历史业绩不代表未来业绩，回测业绩不代表实盘业绩，期市有风险，入市需谨慎。

## 目录

摘要 .....	1
一、 Copula 理论基本内容 .....	1
1.1. Copula 模型理论的提出 .....	1
1.2. Copula 理论主要内容 .....	1
二、 基于 Copula 函数的相关性测度 .....	2
2.1. Kendall 秩相关系数 $r$ .....	2
2.2. 尾部风险测度 .....	3
三、 Copula 函数的常用类型 .....	4
3.1. Copula 函数与 GARCH 模型结合 .....	6
四、 总结和展望 .....	6

## 一、 Copula 理论基本内容

### 1.1. Copula 模型理论的提出

在上一期报告中，我们对 GARCH 模型在单期货品种上的模型进行了建模与回测。对于实际的资产组合配置，涉及多个资产时我们需要研究其相关性，仅使用序列的相关性并不能很好的反映资产间的尾部依赖关系，如商品熊市的多品种大跌。因此如果需要更精细地描述资产间的依赖关系，我们需要研究其联合分布。

Copula 函数被译为“连接”函数。在概率论和统计学中，Copula 函数是用来描述随机变量之间依赖结构的多变量函数。Copula 函数的作用是将不同维度的耦合依赖关系从边际分布中剥离，从而可以单独研究。我们通过单个资产的收益率建模，可以得到单资产的新息边缘分布，然后通过 Copula 函数，我们可以研究新息在多资产上的分布结构。

### 1.2. Copula 理论主要内容

#### 1.2.1. Copula 函数定义

Copula 函数的定义为：若  $C$  是 Copula 函数，则

1.  $C: [0,1]^d \rightarrow [0,1]$ ;
2. 若至少有一个边缘分布  $u_j = 0$ ，则  $C(u_1, \dots, u_d) = 0$ ;
3.  $C$  有着一致统一的标准均匀分布，即为，任取  $u_j \in [0,1], j \in \{1, \dots, d\}$ ，都有

$$C(1, \dots, 1, u_j, 1, \dots, 1) = u_j$$

4.  $C$  是  $d$  元单调递增的，以二元为例，应有任取二维向量  $a, b \in [0,1]^2, a \leq b$

$$\Delta_{(a,b]} C = C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2) \geq 0$$

#### 1.2.2. Copula 函数基本性质

1. 对任意变量  $u_i$ ，函数  $C(u_1, u_2, \dots, u_N)$  都是非减的；
2.  $C(u_1, u_2, \dots, 0, \dots, u_N) = 0, C(1, \dots, 1, u_n, 1, \dots, 1) = u_n$
3. 若变量  $u_n$  相互独立，则其联合 Copula 函数  $C(u_1, u_2, \dots, u_N) = \prod_{n=1}^N u_n$

### 1.2.3. 多元分布的 Sklar 定理及证明

(Sklar 1958) 令  $F(\cdot, \dots, \cdot)$  为具有边缘分布  $F_1(\cdot), F_2(\cdot), \dots, F_N(\cdot)$  的联合分布函数, 则存在一个 Copula 函数, 满足:  $F(x_1, x_2, \dots, x_N) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_N(x_N))$ 。若边缘分布连续, 则  $C(\cdot)$  唯一确定。

在证明 Sklar 定理之前, 我们需要明确随机变量概率变换函数和分位数变换函数的性质。

- 随机变量  $X \sim F$ ,  $F$  连续, 则  $F(X) \sim U(0,1)$

证明:

$$\begin{aligned} P(F(X) \leq u) &= P(F^{-1}(F(X)) \leq F^{-1}(u)) \\ &= P(X \leq F^{-1}(u)) \\ &= F(F^{-1}(u)) = u, u \in [0,1] \end{aligned}$$

- 随机变量  $U \sim U(0,1)$ , 且  $F$  为任意密度分布函数, 则  $X = F^{-1}(U) \sim F$

证明:

$$P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x), x \in R$$

根据 Sklar 定理的推论, 我们可以根据边缘分布函数和一个连接它们的 Copula 函数构造联合分布函数。

## 二、 基于 Copula 函数的相关性测度

### 2.1. Kendall 秩相关系数 $r$

在考察两个变量的相关性时, 最简单直接的方式是考察他们的变化趋势是否一致。若一致, 表明变量间存在正相关; 若正好相反, 表明存在负相关, 由此可以建立一致性与相关性测度的联系。

令  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$  为独立同分布的随机变量, 定义

$$r = P[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0] - P[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0]$$

为 Kendall 秩相关系数。容易证明:

$$r = 2P[(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0] - 1$$

显然对于  $\tau \in [-1,1]$ , 对于任意严格单调递增函数  $s(\cdot)$  和  $t(\cdot)$ , 有

$$[s(x_1) - s(x_2)][t(y_1) - t(y_2)] > 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$$

因此该测度对严格单调递增的变换保持不变。根据定义, 若用 Kendall 秩相关系数度量随机变量  $X, Y$  的相关程度, 则:

当 $r = 1$ 时，表明 $X$ 的变化与 $Y$ 的变化完全一致， $X$ 与 $Y$ 正相关

当 $r = -1$ 时，表明 $X$ 的变化与 $Y$ 的反向变化完全一致， $X$ 与 $Y$ 负相关

当 $r = 0$ 时，表明 $X$ 的变化与 $Y$ 的变化一半一致一半相反一致，不能判断 $X$ 与 $Y$ 是否相关

若随机变量 $X, Y$ 的边缘分布分别为 $F(x), G(y)$ ，相应的 Copula 函数为 $C(u, v)$ ，其中 $u = F(x), v = G(y), u, v \in [0, 1]$ ，则 Kendall 秩相关系数 $r$ 可由相应的 Copula 函数 $C(u, v)$ 给出：

$$r = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1$$

## 2.2. 尾部风险测度

### 2.2.1. VaR (Value at Risk, 在险价值)

VaR 衡量的是：有多少把握，在未来一段时间内，资产损失不会大于某一值。对于资产或资产组合，其收益率分布为 $R \sim F_R$ ，则其损失分布 $L = -R \sim F_L$ ，在一置信水平 $\alpha \in (0, 1)$ 上，在险价值 VaR 被定义为

$$VaR_\alpha = VaR_\alpha L = F_L^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in R: F_L(x) \leq \alpha\}$$

实际上 VaR 是损失分布的分位数。VaR 作为风险衡量指标的的优点有：

- 概念较为直观易懂，易于决策；
- 计算方法适用于所有资产类别和投资组合，因此广泛用于监管和机构风险管理；

VaR 作为风险测度也有其不足：

- 临界值的选择具有主观性，且 VaR 会忽略临界值外的极端事件，无法衡量极端尾部风险；
- VaR 不满足次可加性，在部分情况下无法体现风险分散原理；
- 不满足次可加性也无法作为优化问题的目标函数；
- VaR 未能考虑流动性，在市场低迷期，VaR 可能大大低估了资产的风险。

### 2.2.1. ES (Expected Shortfall, 预期损失)

如果说 VaR 衡量的是“情况能坏到什么样子”的问题，而预期损失要回答“当糟糕情况发生时，损失的期

望值为多大”。ES 被定义为

$$ES_{\alpha}(L) = E(L' | L' < VaR_{\alpha})$$

ES 作为风险测度，与 VaR 类似，但是满足了风险测度的次可加性，因此可以用于投资组合策略优化，其后我们将使用 ES 为测度优化投资组合策略。

### 三、 Copula 函数的常用类型

Copula 函数非常多，在研究中使用最多的函数主要有阿基米德 Copula 函数簇和椭圆 Copula 函数簇。

椭圆 Copula 函数簇有 t Copula 函数、Gaussian Copula 函数等，二者均有对称的尾部相关性，主要差别在尾部厚度。所有椭圆 Copula 函数都是由同一分布的边缘逆分布和该分布的联合概率分布构造而成，例如 Gaussian Copula 由多元正态分布经过概率积分变得来，可表达为

$$C_R^{\text{Gauss}}(u) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

(Genest & Mackay 1986)阿基米德 Copula 函数簇有着统一的函数表达式：

$$C(u_1, u_2, \dots, u_N; \theta) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1; \theta) + \varphi(u_2; \theta) + \dots + \varphi(u_N; \theta))$$

关于阿基米德 Copula 的生成函数，本文不再赘述。本文主要介绍最常使用的 3 种阿基米德 Copula 函数：Gumbel Copula、Clayton Copula 和 Frank Copula。

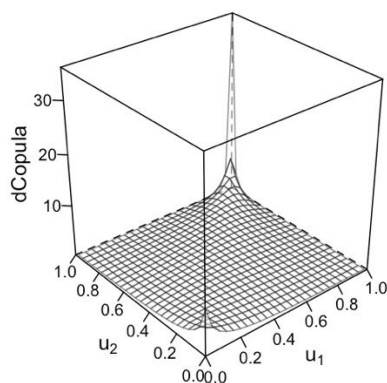
#### 3.1.1. Gumbel Copula

以二元为例，其概率分布函数为

$$C(u_1, u_2) = \exp\left(-((- \ln u_1)^{1/\theta} + (- \ln u_2)^{1/\theta})^{\theta}\right)$$

Gumbel Copula 函数对上尾部的厚尾特性比较敏感，对下尾部的厚尾特性不敏感，因此建模刻画尾部风险时，需要使用收益率相反数。

图 1：二元 Gumbel 函数联合概率密度



数据来源：中信建投期货有限公司

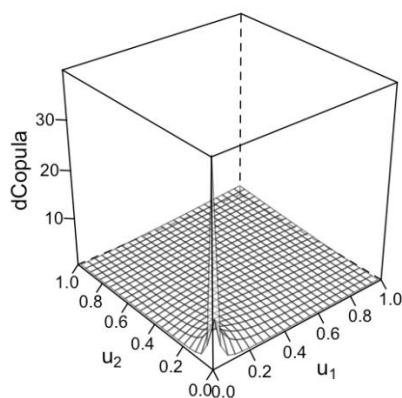
### 3.1.2. Clayton Copula

以二元为例，其概率分布函数为

$$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$$

Clayton Copula 的尾部敏感性与 Gumbel Copula 相反，其适合对下尾部厚尾特性明显的结构建模。

图 2：二元 Clayton 函数联合概率密度



数据来源：中信建投期货有限公司

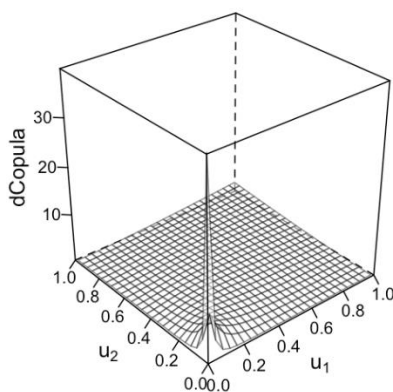
### 3.1.3. Frank Copula

以二元为例，其概率分布函数为

$$C(u_1, u_2) = \frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$$

Frank Copula 密度分布前后尾非对称，适合于描述具有非对称厚尾结构的关系。

图 3：二元 Frank 函数联合概率密度



数据来源：中信建投期货有限公司

## 3.1. Copula 函数与 GARCH 模型结合

在前一篇报告中我们介绍过 GARCH 模型，GARCH-t 过程可以较好地描述单品种时间序列的尖峰厚尾特性，而 GARCH 模型的残差符合其假设分布后，可用于 Copula 模型拟合。最后根据 Copula-GARCH-t 模型或 Copula-GARCH-GED 模型，我们可以得到多品种的收益-波动预测模型。

## 四、总结和展望

本文初步介绍了 Copula 理论、常用风险衡量指标和 Copula 函数的常用类型。不同的 Copula 函数有着不同的对称性与尾部特征，对于实际数据的拟合效果还需后续检验。对于 GARCH 模型，Copula 可以较好地与 GARCH 模型的残差结合。



后续我们会对 Copula-GARCH 模型在配置策略中的应用进行研究。

## 联系我们

### 中信建投期货总部

重庆市渝中区中山三路131号希尔顿商务中心27楼、30楼

电话：023-86769605

### 上海分公司

地址：中国（上海）自由贸易试验区浦电路490号，世纪大道1589号8楼08-11单元

电话：021-58301589

### 济南分公司

地址：济南市历下区泺源大街150号中信广场A座六层611、613室

电话：0531-85180636

### 湖南分公司

地址：长沙市岳麓区观沙岭街道茶子山东路112号滨江金融中心C座2127、2128室

电话：0731-82681681

### 大连分公司

地址：大连市沙河口区会展路129号大连国际金融中心A座大连期货大厦2901号房间

电话：0411-84806336

### 河南分公司

地址：郑州市未来路69号未来大厦2205、2211、1910房，未来公寓1306、1506、1806房

房

电话：0371-65612397

### 河北分公司

地址：廊坊市广阳区吉祥小区20-11号门市一至三层、20-1-12号门市第三层

电话：0316-2326908

### 深圳分公司

地址：深圳市福田区深南大道和泰然大道交汇处绿景纪元大厦111

电话：0755-33378759

### 杭州分公司

地址：浙江省杭州市江干区钱江国际时代广场3幢702室

电话：0571-87380613

### 宁波分公司

地址：浙江省宁波市鄞州区和济街180号国际金融中心F座1809室

电话：0574-89071681

### 西安分公司

地址：陕西省西安市高新区科技路38号林凯国际大厦十九层1905、1906、1907室

电话：029-85725585

### 重庆渝北分公司

地址：重庆市渝北区龙山街道新南路439号中国华融现代广场3幢19-1/2号

电话：023-67380500

### 上海浦东分公司

地址：中国（上海）自由贸易试验区浦东南路528号2202室

电话：021-68597013

### 四川分公司

地址：成都市武侯区科华北路62号力宝大厦南楼1801、1802、1803室

电话：028-62818710

### 重庆分公司

地址：重庆市渝中区中山三路107号上站大楼平街名义层11-A4-A6

电话：023-61361140

### 海南分公司

地址：海南省海口市龙华区滨海大道77号中环国际广场10层1002号

电话：0898-68538536

### 北京朝阳门北大街营业部

地址：北京市东城区朝阳门北大街6号首创大厦207室

电话：010-85282866

### 江西分公司

地址：江西省南昌市红谷滩区红谷中大道998号绿地中央广场A1#办公楼4801A

室、4802室

电话：0791-82082701

### 广州东风中路营业部

地址：广州市越秀区东风中路410号第16层自编1605C、1605B、1606房

电话：020-28325286

### 漳州营业部

地址：福建省漳州市龙文区九龙江大道以东漳州碧湖万达广场A2地块9幢1203

号

电话：0596-6161601

### 安徽分公司

地址：安徽省合肥市包河区马鞍山路130号万达广场C区6幢1903、1904、

1905室

电话：0551-2889767

### 上海徐汇营业部

地址：上海市徐汇区斜土路2899甲号1幢1601室

电话：021-64040178

### 湖北分公司

地址：武汉市江汉区香港路193号中华城A写字楼栋/单元36层3601号02-03

室

电话：027-59909521

**南京分公司**

地址：南京市黄埔路2号黄埔大厦11层D1、D2座

电话：025-86951881

**北京北三环西路营业部**

地址：北京市海淀区中关村南大街6号9层912

电话：010-82129971

**太原营业部**

地址：山西省太原市小店区长治路103号阳光国际商务中心A座902室

电话：0351-8366898

**广州分公司**

地址：广州市天河区黄埔大道西100号富力盈泰大厦B座1406

电话：020-22922102

**北京国贸营业部**

地址：北京市朝阳区光华路8号17幢一层A113房间

电话：010-85951101

**福州营业部**

地址：福建省福州市台江区宁化街道振武路70号（原江滨西

大道北侧）福晟·钱隆广场18层01商务办公

电话：0591-83625596

**方顿物产（重庆）有限公司**

地址：重庆市渝中区中山三路131号希尔顿商务中心2603室

电话：023-86769662

## 重要声明

本报告内容仅供符合《证券期货投资者适当性管理办法》规定可参与期货交易的投资者参考。在任何情形下都不构成对接收本报告内容投资者的任何投资建议，投资者应充分了解各类投资风险并谨慎考虑本报告发布内容是否符合自身特定状况，自主做出投资决策并自行承担投资风险。中信建投期货不因任何订阅或接收本报告的行为而将订阅人视为中信建投的客户，投资者依据本报告内容作出的任何决策与中信建投期货或作者无关。

本报告发布内容如属于系列解读，则投资者可能会因缺乏对完整内容的了解而对其中假设依据、研究依据、结论等内容产生误解，提请投资者参阅我司已发布的完整系列报告，仔细阅读其所附各项声明、数据来源及风险。

中信建投期货对本报告所载资料的准确性、可靠性、时效性及完整性不作任何明示或暗示的保证，本报告意见仅代表报告发布之时的判断，相关研究观点可能依据我司后续发布的报告在不发布通知的情形下作出更改。

本报告发布内容为中信建投期货所有。未经我司书面许可，任何机构和个人不得以任何形式对本报告进行翻版、复制和刊发，如需引用、转发等，需注明出处为“中信建投期货”，且不得对本报告进行任何增删或修改。亦不得从未经我司书面授权的任何机构、个人或其运营的媒体平台接收、翻版、复制或引用本报告发布的全部或部分内容。版权所有，违者必究。

**全国统一客服电话：400-8877-780**

**网址：[www.cfc108.com](http://www.cfc108.com)**