

# 【建投专题】美式期权定价（二）：Barone-Adesi-Whaley定价模型

刘超 CFC宏观金工 2021-10-29 20:16

**重要提示：**通过本订阅号发布的观点和信息仅供投资者中符合《证券期货投资者适当性管理办法》规定可参与期货交易的投资者参考。因本订阅号暂时无法设置访问限制，若您并非符合《办法》规定的投资者，为控制投资风险，请您请取消关注，请勿订阅、接收或使用本订阅号中的任何信息。对由此给您造成的不便表示诚挚歉意，感谢您的理解与配合！

---

作者 | 刘超 中信建投期货金融衍生品部

本报告完成时间 | 2021年10月29日

目前大连商品交易所、郑州商品交易所、以及上海期货交易所的所有商品期权都为美式期权，并且大商所的所有期权合约会根据BAW(Barone-Adesi-Whaley)美式期权定价模型计算新上市期权合约的挂牌基准价。在这篇文章中，我们将会使用BAW模型来对美式期权定价，该模型一般可以应用在做市商报价和投资者进行价格对比的场景下。另外，在定价中更为重要的是隐含波动率的计算与使用，我们会在之后的文章中进行探究。

BAW模型(Barone-Adesi and Whaley, 1987)使用了求二次近似解的方法来定价美式期权，相对其他的如Finite-Difference方法和Compound-Option方法更加简单，计算更高效。在Barone-Adesi and Whaley(1987)的论文中，BAW模型所定价的期权标的可适用于商品及商品期货，在1987年美国市场上的期权大部分也是美式商品期货期权。

在看涨期权定价过程中，当持有成本(Cost of Carry)大于无风险利率时，美式期权与欧式期权的价值相同，美式期权可以一直持有至到期再行权，因此可以用BSM(Black-Scholes Model)模型定价，但是当持有成本小于无风险利率，则美式期权价值得以体现。在看跌期权定价过程中，不管持有成本与无风险利率关系如何，美式期权提早行权都有所价值，例如期权标的价格显著低于行权价的情况。

因此，美式期权定价的关键思路便是将期权分离：一方面是欧式期权价格，另外一方面是合约提前实施条款所增付的补偿价格(Premium)。整体而言，BAW模型定价过程可以主要分成3个重要阶段：

## ① 通过近似方法找到定价公式

首先，由于美式期权与欧式期权都满足偏微分方程，因此两者线性差值也会满足偏微分方程，通过公式推导可以分别获得美式看涨和美式看跌期权定价公式(推导过程见附录)。

### 美式看涨期权

$$C(S, X, T) = \begin{cases} c_{BSM}(S, X, T) + A_2 \left( \frac{S}{S^*} \right)^{q_2} & \text{when } S < S^* \\ S - X & \text{when } S \geq S^* \end{cases} \quad (1.1)$$

其中S为标的当前价格，X为行权价，b为持有成本(Cost of Carry)，σ为定价所假设的波动率，r为无风险利率，T为距离到期时间：

$$A_2 = \frac{S^*}{q_2} \{1 - e^{(b-r)T} N[d_1(S^*)]\} \quad (1.2)$$

$$d_1(S) = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(b + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (1.3)$$

$$q_2 = \frac{\left[ -(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + \frac{4M}{K}} \right]}{2} \quad (1.4)$$

$$M = \frac{2r}{\sigma^2} \quad (1.5)$$

$$N = \frac{2b}{\sigma^2} \quad (1.6)$$

$$K = 1 - e^{-rT} \quad (1.7)$$

### 美式看跌期权

$$P(S, X, T) = \begin{cases} p_{BSM}(S, X, T) + A_1 \left( \frac{S}{S^{**}} \right)^{q_1} & \text{when } S > S^{**} \\ X - S & \text{when } S \leq S^{**} \end{cases} \quad (1.8)$$

其中：

$$A_1 = -\frac{S^{**}}{q_1} \{1 - e^{(b-r)T} N[-d_1(S^{**})]\} \quad (1.9)$$

$$q_1 = \frac{\left[ -(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + \frac{4M}{K}} \right]}{2} \quad (1.10)$$

$$M = \frac{2r}{\sigma^2} \quad (1.11)$$

$$N = \frac{2b}{\sigma^2} \quad (1.12)$$

$$K = 1 - e^{-rT} \quad (1.13)$$

### Ⓑ 通过Newton-Raphson近似解方法找到 $S^*$ 和 $S^{**}$

在(A)中，看涨和看跌期权的 $S^*$ 和 $S^{**}$ 可以用Newton-Raphson近似解方法找到，推导出近似解的方程如下(详细来源见附录)：

$$S^* - X = c(S^*, X, T) + \{1 - e^{(b-r)T} N[d_1(S^*)]\} \times S^* \times \frac{1}{q_2} \quad (1.14)$$

由于在迭代过程中，左边与右边最开始并不相等，因此我们先从右边方程对 $S_i$ 求偏导(Put用 $S_j$ 表示，实质是一样的，以下我们都用 $S_i$ 表示)，斜率 $b_i$ 用表示，再从 $S_1$ 进行迭代。最终当左边与右边等式满足最小容忍度后，我们将最后的 $S_i$ 作为近似解。过程如下：

#### 看涨期权

$$LHS(S_i) = S_i - X \quad (2.1)$$

$$RHS(S_i) = c(S^*, X, T) + \{1 - e^{(b-r)T} N[d_1(S^*)]\} \times S^* \times \frac{1}{q_2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial RHS}{\partial S_i} = b_i = e^{(b-r)T} N[d_1(S_i)] \left(1 - \frac{1}{q_2}\right) + \left\{1 - \frac{e^{(b-r)T} n[d_1(S_i)]}{\sigma\sqrt{T}}\right\} \times \frac{1}{q_2} \quad (2.3)$$

$$RHS(S_i) + b_i(S_{i+1} - S_i) = S_{i+1} - X \quad (2.4)$$

$$S_{i+1} = \frac{[X - RHS(S_i) - b_i S_i]}{(1 - b_i)} \quad (2.5)$$

$$\frac{|LHS(S_i) - RHS(S_i)|}{X} < 0.00001 \quad (2.6)$$

$$X - S^{**} = p(S^{**}, X, T) + \{1 - e^{(b-r)T} N[d_1(S^{**})]\} \times S^{**} \times \frac{1}{q_1} \quad (2.7)$$

$$LHS(S_j) = X - S_j \quad (2.8)$$

$$RHS(S_j) = p(S_j, X, T) - \{1 - e^{(b-r)T} N[-d_1(S_j)]\} \times S_j \times \frac{1}{q_1} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial RHS}{\partial S_j} = b_j = -e^{(b-r)T} N[-d_1(S_j)] \left(1 - \frac{1}{q_1}\right) - \left\{1 + \frac{e^{(b-r)T} n[-d_1(S_j)]}{\sigma\sqrt{T}}\right\} \times \frac{1}{q_1} \quad (2.10)$$

$$S_{j+1} = \frac{[X - RHS(S_j) + b_j S_j]}{(1 - b_j)} \quad (2.11)$$

### ③ 设定最初值

想令 $S_i$ 通过迭代的方法快速得到，我们可以令 $T$ 趋向于无穷来选取 $S_1^*$ 和 $S_1^{**}$ 作为起始点，这样的起始点更加贴合近似解。公式如下：

$$S_1^* = X + [S^*(\infty) - X][1 - e^{h_2}] \quad (3.1)$$

$$h_2 = -(bT + 2\sigma\sqrt{T}) \left[ \frac{X}{S^*(\infty) - X} \right] \quad (3.2)$$

$$S^*(\infty) = \frac{X}{1 - 2 \left[ -(N-1) + \sqrt{(N-1)^2 + 4M} \right]^{-1}} \quad (3.3)$$

$$S_1^{**} = S^{**}(\infty) + [X - S^{**}(\infty)][1 - e^{h_1}] \quad (3.4)$$

$$h_1 = (bT - 2\sigma\sqrt{T}) \left[ \frac{X}{X - S^{**}(\infty)} \right] \quad (3.5)$$

$$S^{**}(\infty) = \frac{X}{1 - 2 \left[ -(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + 4M} \right]^{-1}} \quad (3.6)$$

我们进一步阐释在第一阶段定价公式的推导过程。其中最基本的假设是美式期权与欧式期权都满足偏微分方程，因此两者线性差值也会满足偏微分方程，我们用美式看涨期权来举例( $e_c$ 代表美式看涨期权的补偿价格(Premium)， $C_A$ 和 $C_E$ 表示美式看涨期权和欧式看涨期权价格， $b$ 代表持有成本(Cost of Carry))：

$$e_c(S, t) = C_A(S, t) - C_E(S, t) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + bS \frac{\partial C_A}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_A}{\partial S^2} = rC_A \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial C_E}{\partial t} + bS \frac{\partial C_E}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_E}{\partial S^2} = rC_E \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial e_c}{\partial t} + bS \frac{\partial e_c}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 e_c}{\partial S^2} = re_c \quad (4.4)$$

我们将补偿价格(Premium)的(4.4)式移项可以得到：

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 e_c}{\partial S^2} - re_c + bS \frac{\partial e_c}{\partial S} + \frac{\partial e_c}{\partial t} = 0 \quad (4.5)$$

为了更好地展示，我们将(4.5)式左右都乘以 $\sigma^2/2$ ，用 $M=2r/\sigma^2$ 和 $N=2b/\sigma^2$ 进行替代，到期时间表示为 $T=t^*-t$ ，其中 $t^*$ 表示初始值距到期时间，针对补偿价格(Premium)通过求导可以得到 $\partial e_c/\partial T = -\partial e_c/\partial t$ ，代入(4.5)可以得到方程：

$$\frac{\partial^2 e_c}{\partial S^2} - M e_c + N S \frac{\partial e_c}{\partial S} - \frac{\partial e_c}{\partial T} = 0 \quad (4.6)$$

BAW模型创作者将早期行权的补偿价格(Premium)进行定义，这样的选择形式可以保证边界条件被满足，但这种假设并不唯一，选取其他可以保证边界条件被满足的条件也是可以的，因此也有其他基于BAW模型的相关改进模型。BAW模型创作者的假设补偿价格(Premium)为：

$$e_c = X^* f \quad (4.7)$$

将(4.7)， $\partial^2 e_c/\partial S^2 = X^*(\partial^2 f/\partial S^2)$ ，以及 $\partial e_c/\partial T = (\partial X/\partial T)*f + X^*(\partial X/\partial T)*(df/dK)$  (通过对 $S$ 、 $T$ 求导可得到)，代入补偿价格(Premium)所满足的方程(4.6)，可以得到：

将 $X(T)=1-e^{-rT}$ 代入并化简，得到：

当期权快要到期时，到期时间 $T$ 趋向于0， $\partial f/\partial X$ 趋向于0；或者当距离期权到期时间非常长的时候， $(1-X)$ 趋近于0，所以只有在这两种情况时候， $(1-X)*M*(\partial f/\partial S)$ 趋向于0，此时BAW模型给出的美式期权定价误差较小；而当距离期权到期时间介于两者之间的时候，BAW模型会有相对较大的误差。以下是 $T$ 取极值， $(1-X)*M*(\partial f/\partial S)$ 趋向于0的推导过程：

如有 $(1-X)*M*(\partial f/\partial X)=0$ ，因此：

上式可以看成两个二阶ODE拥有两个 $aS^q$ 的独立解（参考二阶非齐次常系数线性ODE解法，这里不再赘述），代入 $f=aS^q$ ：

上式的解为：

因为 $M/K>0$ ， $q_1<0$ ， $q_2>0$ ，因此最终的普通解为：

$q_1$ 和 $q_2$ 已经确定，最终需要去找 $a_1$ 与 $a_2$ 的值，当 $q_1 < 0$ 同时 $a_1 \neq 0$ ，当  $S$ 趋向于0时公式 $f$ 将会趋向无穷，价格为0在实际中并不存在，此时美式期权没有意义，因此我们限制 $a_1 = 0$ ，最后美式看涨期权便可以表示为（我们将 $C$ 表示为美式看涨期权价格， $c$ 表示欧式看涨期权价格）：

接下来去找 $a_2$ ，这里需要结合美式期权的边界条件。上面式子里，当 $S = 0$ ， $C(S, T) = 0$ ，因为 $c(S, T)$ 和 $Xa_2S^{q_2}$ 都等于0。当 $S$ 增长，假设 $a_2 > 0$ ， $C(S, T)$ 增长。为了满足美式期权的价值， $c(S, T) + Xa_2S^{q_2}$ 需要达到但不穿越 $S - X$ 的界限：低于 $S^*$ 的界限， $C(S, T) = c(S, T) + Xa_2S^{q_2}$ ，而高于 $S - X$ ，则美式期权价值为 $S - X$ 。

为了找到 $S^*$ ，美式期权价值应为 $C(S^*, T)$ ，因此有：

可以行权的看涨期权的关于 $S^*$ 的导数，应该等于 $C(S^*, T)$ 的关于 $S^*$ 的导数，两边对 $S^*$ 进行求导：

$$1 = e^{(b-r)T} N[d_1(S^*)] + Xq_2a_2S^{*q_2-1} \quad (4.20)$$

其中  $e^{(b-r)T} N[d_1(S^*)]$  是  $c(S^*, T)$  的关于  $S^*$  的导数， $d_1(S^*) = [\ln(S^*/X) + (b + \sigma^2/2)T]/(\sigma T^{1/2})$ ，变换得到：

$$a_2 = \{1 - e^{(b-r)T} N[d_1(S^*)]\}/Xq_2S^{*q_2-1} \quad (4.21)$$

将 $a_2$ 代入，此时的 $S^*$ 可以用迭代方法求解：

$$S^* - X = c(S^*, T) + \{1 - e^{(b-r)T} N[d_1(S^*)]\}S^*/q_2 \quad (4.22)$$

最终我们获得定价公式：

$$C(S, X, T) = \begin{cases} c_{BSM}(S, X, T) + A_2 \left(\frac{S}{S^*}\right)^{q_2} & \text{when } S < S^* \\ S - X & \text{when } S \geq S^* \end{cases} \quad (1.1)$$

参考资料：

*Efficient Analytic Approximation of American Option Values, Giovanni Barone-Adesi and Robert E. Whaley, The Journal of Finance, VOL XLII, No. 2, June 1987*

*The Complete Guide to Option Pricing Formulas, Espen Gaarder Haug*

作者姓名：刘超

期货投资咨询从业证书号：Z0012924

电话：023-86769757

研究助理：张仕康

期货从业证书号：F3076198

电话：021-58304077



**CFC宏观金工**

长按二维码关注我们，获取更多宏观和金融衍生品资讯！

#### 免责声明

本订阅号（微信号：gh\_a70d4561aac1）为中信建投期货有限公司（下称“中信建投”）研究发展部下设的金融衍生品事业部依法设立、独立运营的唯一官方订阅号。本订阅号所载内容仅面向《证券期货投资者适当性管理办法》规定可参与期货交易的投资者参考。中信建投不因任何订阅或接收本订阅号内容的行为而将订阅人视为中信建投的客户。

本订阅号中的信息均来源于公开可获得资料，中信建投对本订阅号所载资料的准确性、可靠性、时效性及完整性力求准确可靠但并不作任何明示或暗示的保证。本订阅号中资料、意见等仅代表文章发布当日的判断，相关研究观点可能依据中信建投后续发布的研究分析文章中更改。

全国统一客服电话：400-8877-780

网址：www.cfc108.com



# 闪电开户

· 足不出户 · 轻松办理



阅读 142

分享 收藏

3

1