

【ITF-期权】经典雪球定价及复制雪球策略

摘要

本文参考了业内的对雪球的两种定价方法——蒙特卡洛模拟法和有限差分法，并进行建模计算，比较了两种模型的优势和劣势。从最终计算结果来看，蒙特卡洛模拟于有限差分法的计算结果非常接近，但有限差分法计算速度上有了很大幅度的提升。且在使用有限差分法下，可以获取任意时刻任意标的价格下的雪球价值，在后续计算 Greeks 时，速度提升的更加明显。

复制雪球策略是指通过 IC 动态调仓构造一个价值接近为 0 的雪球产品，该策略相比于直接购买券商发行的雪球产品有以下几个优点：（1）券商的雪球产品出售可能包含其他费用，因此在票息上以及产品的定价上本身就包含一部分成本。（2）复制中证 500 雪球，因为 Delta 大多数时间为正，因此持有 IC 的多头可以获取基差收敛带来的收益。（3）IC 相对于 IF 和 IH 有更高的波动率，理论上可以获取更高的票息收入。（4）复制期权策略可以在风险事件发生时，迅速止损出局，而购买券商发行的产品则有锁定期，存在流动性风险。从实证结果来看，复制雪球策略虽然也没办法抵御单边大幅下行的风险，但是相比于直接购买雪球产品，策略的年化收益更高，潜在胜率也更高。

当前中证 500 指数处于震荡下跌的趋势之中，已经实现较大的跌幅。从估值的角度，截止至 2022 年 4 月 26 日，中证 500 的 TTM-PE 已经接近过去 10 年的最低位，已经进入价值投资的区域，如果认为再继续下跌 20% 的可能性较低，上述策略不失为一个好的选择。

国贸期货 · 投资咨询部

白素娜

联系方式：0592-5897833

投资咨询号：Z0013700

从业资格号：F3023916

欢迎扫描下方二维码



期市有风险，入市需谨慎

一、雪球产品简介

雪球产品是指证券公司发行的收益凭证。收益凭证的官方定义是证券公司以自身信用发行的，约定本金和收益的偿付与特定标的相关联的有价证券。之所以被称为“雪球”，是因为这类产品的收益能像滚雪球一样，只要市场不发生雪崩式下跌，持有时间越长，获利就可能越高。

雪球产品的本质上类似为带障碍条款的奇异期权，设置有敲入、敲出价格。经典雪球的结构下，雪球产品的发行方为看跌期权的买方，而雪球产品的持有者为看跌期权的卖方。为了了解雪球的收益结构，我们以一个经典的雪球产品作为案例：

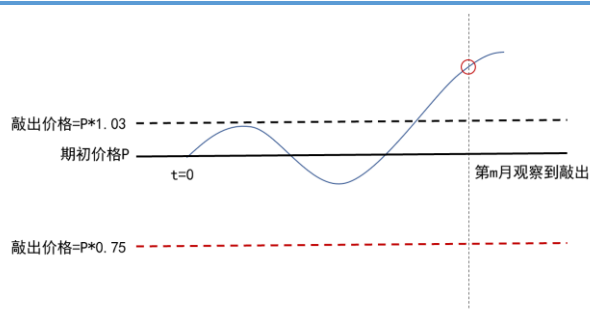
表 1. 经典雪球条款

挂钩标的	中证 500 指数
产品期限	12M
敲入价格	$75\% \times \text{期初价格}$
敲出价格	$103\% \times \text{期初价格}$
敲入观察期	每天观察 1 次（当价格跌破敲入价格，视为发生敲入事件）
敲出观察期	每月观察 1 次（当价格涨超敲出价格，视为发生敲出事件）
票息	20%

（1）情景 1：当标的敲出（包括直接敲出+先敲入再敲出）

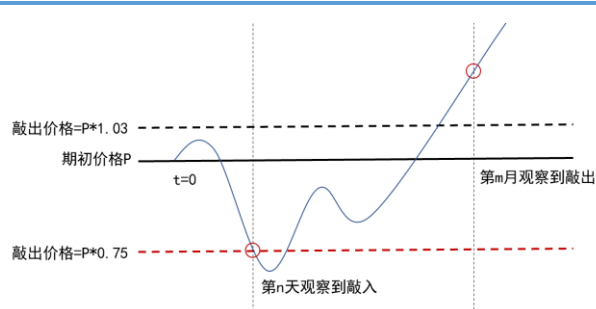
当标的有敲出，无论期间标的是不是敲入，均可以获得 20% 的年化收益。也就是当标的在第 m 观察月涨了 3%，不论之前怎么跌，都可以获取收益率为： $20\%/12 \times m$ ，而后产品结束。

图 1. 标的直接敲出



数据来源：Wind，国贸期货研究院绘制

图 2. 标的先敲入再敲出

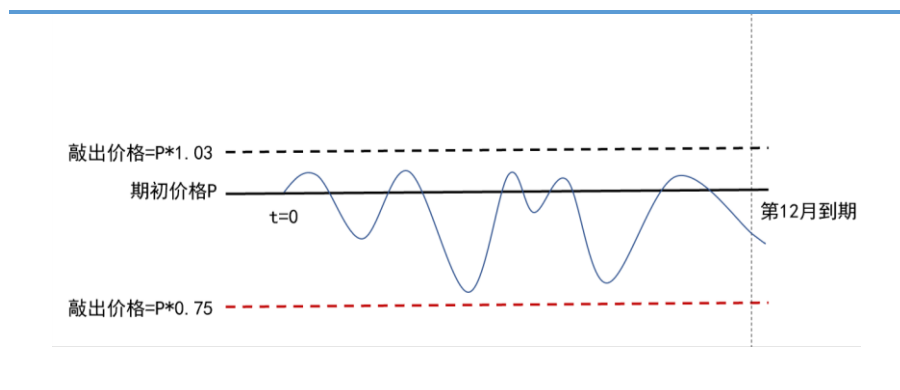


数据来源：Wind，国贸期货研究院绘制

（2）情景 2：标的没有敲入且没有敲出

当标的没有敲出，且期间也没有敲入，到期也可以获取 20% 的收益。也就是说，虽然每次月度观察标的没有涨 3%，但是期间价格也没跌 25%，那就可以获取 20% 收益，产品到期结束。

图 3. 标的没有敲入也没有敲出

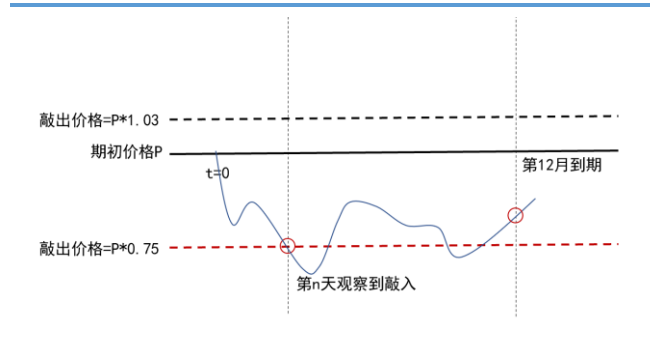


数据来源：Wind，国贸期货研究院绘制

(3) 情景 3：当标的敲入且没有敲出

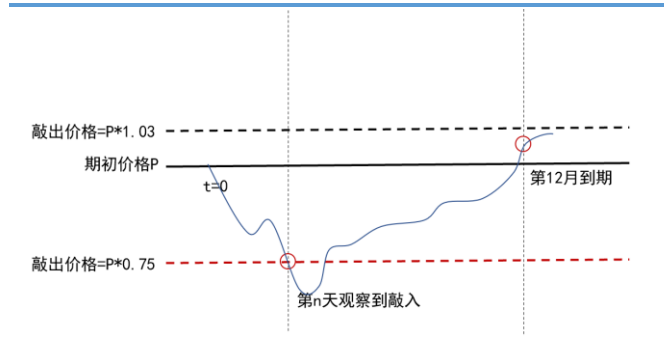
当标的敲入后没有敲出，须看标的到期的涨跌幅，如果标的没涨超过期初价格，那就需要承担标的的下行的所有损失。如果价格涨超过期初价格，那也只能获取 0% 的收益。也就是说，如果标的跌太多，且最终没涨超 3%，则收益率为 $\text{Min}(\text{到期标的的涨幅}, 0)$ 。

图 4. 标的敲入后没有敲出，且期末低于期初价格



数据来源：Wind，国贸期货研究院绘制

图 5. 标的敲入后没有敲出，但期末高于期初价格



数据来源：Wind，国贸期货研究院绘制

总的来说，需求购买方笃定未来价格不会跌破 25%，或即使跌破 25%，也能够涨回来。因此我们也能直观的看出，如果价格跌破 25%，而且后续依旧在低位，雪球的购买方将面临极大的下行风险。

二、经典雪球产品定价

针对衍生品的定价，主流的有这以下几类：首先是有解析解的，也就是可以通过公式直接求得。其次是没有解析解的需要用数值方法计算，数值方法又包括二叉树、三叉树、蒙特卡洛模拟，有限差分等等。本文主要讨论蒙特卡洛模拟法和有限差分法。

(1) 蒙特卡洛模拟法 (MC)

蒙特卡洛模拟是假设标的资产价格符合几何布朗运动：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz。$$

其中 dz 符合标准布朗运动。通过模拟资产价格走势来计算期权价格，通过计算每条路径的期权价格并通过大量的

路径做平均，即可获取期权的价格。MC 的优点是（1）思想简单，只要模拟次数够多，就可以获取期权的价格，（2）可以解决路径依赖的问题。但是其缺陷也比较明显：（1）需要大量的计算，如果期权复杂，为得到足够的路径，需要计算的时间较长，经验上至少需要 30 万以上条路径才能获得较准确的结果；（2）对于可以提前行权的问题（例如美式期权）较难解决。

雪球产品虽然可以提前到期，但不涉及提前行权。也就是通过蒙特卡洛模拟可以很好解决雪球产品的定价问题。

（2）有限差分法（PDE）

假设标的资产价格 S 满足几何布朗运动，衍生品价格为 $f(S, t)$ ，通过伊藤引理可以构造一个无风险组合，以无风险收益作为收益，获得一个偏微分方程：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

该偏微分方程可以用于所有有价资产的衍生品定价，不同的边界条件可以获得不同的衍生品价格。有些边界条件（例如欧式期权）可以通过求解该偏微分方程获得解析解，有的则需要通过数值方法求解近似解，有限差分法就是这类型。

有限差分法的思想是，将所有的价格和时间做一个平面，通过网格化，可以用 $f(i, j)$ 处的差分近似得到 $i\Delta t$ 时刻、 $j\Delta S$ 价格的 $\frac{\partial f}{\partial t}$ ， $\frac{\partial f}{\partial S}$ ，以及 $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$ ，通过带入以上偏微分方程可以获得 $i\Delta t$ 时刻、 $j\Delta S$ 价格，期权价格之间的关系式。具体的，根据差分过程的不同，可以分成显性差分 and 隐性差分，显性差分下，可以获得：

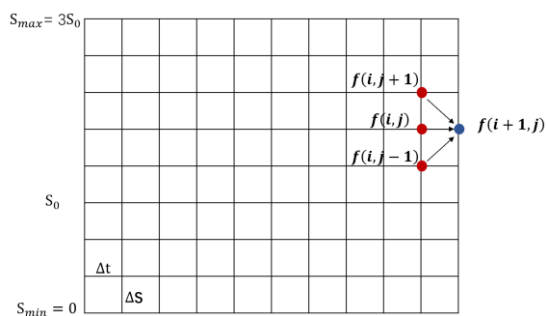
$$f(i, j) = a_j f(i + 1, j - 1) + b_j f(i + 1, j) + c_j f(i + 1, j + 1)$$

隐性差分下，可以获得：

$$f(i + 1, j) = a_j f(i, j - 1) + b_j f(i, j) + c_j f(i, j + 1)$$

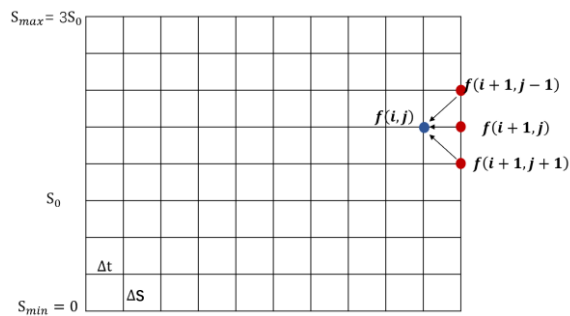
由于边界条件已知，由后往前即可推导出 0 时刻下，所有 S 价格下的期权价格。隐性方法相对复杂，因为是多个前一期期权价格与后一期发生关系，需要求解多个方程，显性方法相对简单，因为是多个后一期期权价格与前一期发生关系（与二叉树非常相似），但是求解不稳定，当 ΔS 较大时可能没办法收敛。

图 6. 隐性差分法下的网格化



数据来源：Wind，国贸期货研究院绘制

图 7. 显性差分法下的网格化



数据来源：Wind，国贸期货研究院绘制

我们以隐性差分法为例，

$$a_j = \frac{1}{2}jr\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t$$
$$b_j = 1 + r\Delta t + \sigma^2j^2\Delta t$$
$$c_j = -\frac{1}{2}jr\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2j^2\Delta t$$

使用 PDE 求解衍生品价格，最大的优点是计算量相较 MC 法较小。缺点主要是：（1）求解过程不够直观，隐性差分法需要用到矩阵计算，显性差分法有些情况下解不稳定；（2）不好解决路径依赖的问题。

使用 PDE 求解雪球产品的价格，最重要是找到雪球产品的边界条件，我们借鉴业内的方法，将雪球拆成几个产品组合进行定价。可以将上述三个场景分别表示 3 个不一样的期权组合：

表 2. PDE 方法下雪球结构的拆分（借鉴）

	期权类型		上边界条件 $S \rightarrow S_{max}$	下边界条件 $S \rightarrow 0$	右边界条件 $t = T$
场景 1	发生敲出时间则获取年化票息，此时相当于持有一个向敲出的看涨期权（执行价与敲出价格相等）+敲出获取一定票息。	V1	期权价格趋于 0。但是当在月度观察日时如有敲出，需要用实际的票息收入代替所有敲出价格以上部分。	当价格趋于 0 时，期权价格趋于 0。因为此时敲出的概率极小。	价格在敲入价格 0.75 以上时，获取年化票息，其余为 0。
场景 2	只有当价格在敲入价和敲出价二者之间，到期才能获取年化票息。此时相当于一个双边障碍期权，即向下敲出，向上也敲出。	V2	期权价格趋于 0。但是当在月度观察日时如有敲出，需要用 0 代替所有敲出价格以上部分。	价格敲入观察连续，需要用 0 代替所有敲入价格以下部分。	在敲入价格和敲出价格之间取得年化票息，其余为 0。
场景 3	向下敲入且没有向上敲出，到期收益与卖出一个看跌期权相同。此时情况相对复杂，因为涉及到路径依赖。可以看成两个期权组合： ①卖出向上敲出看跌期权。即向上敲出时期权无效。 ②买入双边障碍看跌期权：当价格在敲入价与敲出价之间没有敲出时，期权价格为看跌期权到期收益，用来抵消①	V3	期权价格趋于 0。但是当在月度观察日时如有敲出，需要用 0 代替所有敲出价格以上部分。	为入场价格 K。	Max (K - 到期价格, 0)
		V4	期权价格趋于 0。但是当在月度观察日时如有敲出，需要用 0 代替所有敲出价格以上部分。	价格敲入观察连续，需要用 0 代替所有敲入价格以下部分。	Max (K - 到期价格, 0)，但是当价格在敲入价格与敲出价格，需要用 0 代替。

最终雪球价值计算结果为 V1+V2-V3+V4。

我们以第一部分的案例为例，假设：

表 3. 计算案例

期初价格	1.00
产品期限	12M
敲入价格	75% × 期初价格
敲出价格	103% × 期初价格

敲入观察期	每天观察 1 次（当价格跌破敲入价格，视为发生敲入事件）
敲出观察期	每月观察 1 次（当价格涨超敲出价格，视为发生敲入事件）
票息	20%
无风险收益率	3%
波动率	20%

两种模型计算结果如下：

表 4. 两种数值方法的比较

方法	蒙特卡洛模拟	有限差分法（隐性）
雪球价值	0.0417	0.0412
Delta	-0.1701	-0.1643
Gamma	-5.8487	-4.1731
Theta	0.0440	0.0965
Vega	-0.6747	-0.6166
模型单次定价计算速度 （取 10 次平均）	9.32s	0.13s

从最终计算结果来看，蒙特卡洛模拟与有限差分法的计算结果非常接近，但有限差分法计算速度上有了很大幅度的提升。且在使用有限差分法下，可以获取任意时刻任意标的价格下的雪球价值，在后续计算 Greeks 时，速度提升的更加明显。

（3）雪球价格影响因素

因为雪球的定价模型中有涉及了几项：

$$Snow_ball_price = f(Knock_out, Knock_in, coupon, T, rf, sigma)$$

雪球产品相当于卖出带有障碍条款的看跌期权，因此与雪球价格与其影响因素的关系如下：

表 5. 雪球价格影响因素

参数	参数名称	与价格关系	备注
$Knock_out$	敲出价格	负相关	敲出价格越低，敲出的概率越高，胜率越高。
$Knock_in$	敲入价格	负相关	敲入价格越低，雪球的安全边际越大。
$coupon$	年化票息	正相关	票息高，雪球价格高。
T	产品期限	负相关	产品存在敲出时间，对于敲出不受产品期限的影响，而一旦敲入，产品期限越长，看跌期权价格越高，雪球的值越低。
rf	无风险利率	正相关	看跌期权价格与无风险利率负相关，因此与雪球价格为正相关。
$sigma$	波动率	负相关	卖出带有障碍条款的看跌期权，波动率越高，对于期权卖方不利。

三、复制雪球策略（以中证 500 指数为例）

基于一个简单的想法，我们选择合适的敲入价格与敲出价格，并假定合理的波动率，令

$$f(Knock_{out}, Knock_{in}, coupon, T, rf, sigma) = 0$$

可以获取年化票息的合理定价。此时，我们可以在市场上通过 Delta 动态对冲获取一个近似的中证 500 雪球产品，该产品的价格为 0，如果市场上未出现大幅度的下跌，则可以获取稳定的收益。该策略相比于直接购买券商发行的雪球产品有以下几个优点：（1）券商的雪球产品出售可能包含其他费用，因此在票息上以及产品的定价上本身就包含一部分成本。（2）复制中证 500 雪球，因为 Delta 大多数时间为正，因此持有 IC 的多头可以获取基差收敛带来的收益。（3）IC 相对于 IF 和 IH 有更高的波动率，理论上可以获取更高的票息收入。（4）复制期权策略可以在风险事件发生时，迅速止损出局，而购买券商发行的产品则有锁定期，存在流动性风险。

该策略的适用范围在于，对于指数的判断不会大幅下跌（不会跌破自己设置的敲入价格）。因为当指数出单边的大幅下跌，会导致雪球敲入，有较大的损失。由于 Delta 在敲入价格附近会出现较大幅度的波动（gamma 较大），且在有限差分法下，越临近到期日敲入价格附近出现极端值的可能性也较大，因此在敲入附近的 delta 值采取平滑的处理。我们假设每个月发出一次产品，时间间隔为 21 个交易日，到期时间为 252 个交易日。

我们构建了如下的一个雪球产品：

表 6. 策略要素

期初价格	中证 500 指数入场时的收盘价
产品规模	1000 万
产品期限	252 个交易日
敲入价格	80% × 期初价格
敲出价格	101% × 期初价格
敲入观察期	每个交易日观察 1 次（当价格跌破敲入价格，视为发生敲入事件）
敲出观察期	每 21 个交易日观察 1 次（当价格涨超敲出价格，视为发生敲出事件）
票息	12%
无风险收益率	0%
波动率	20%

通过第二部分的定价模型我们可以知道，该雪球的理论价格为-0.77%，也就是复制这样一个雪球结构，成本基本为 0。初始的 Delta 为 0.3740。我们回测的数据从 2016 年 3 月开始，入场时间截止至 2021 年 3 月，以保证所有产品均已到期。可以看到，该策略之下，胜率相对较高，产品平均存续 3.97 个月。相比于直接购买雪球产品，策略的年化收益更高，原因主要在于 IC 多头带来的贴水收益。相比于持有 IC 合约进行滚动的策略，潜在胜率也更高。

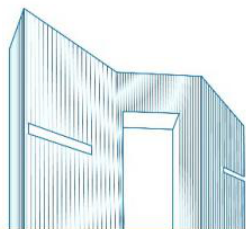
当前中证 500 指数处于震荡下跌的趋势之中，已经实现较大的跌幅。从估值的角度，当前中证 500TTM-PE 已经接近过去 10 年的 2%分位，已经进入价值投资的区域，如果认为再继续下跌 20%的可能性较低，上述策略不失为一个好的选择。

表 7. 策略回测结果

入场日期	终止日期	入场点位	出场点位	策略到期 收益 (元)	持续月份数	策略到期 收益率	策略到期 收益率 (年化)	区间涨幅	雪球产品 到期收益
2016/3/7	2016/4/6	5752.55	6323.43	449520	1	4.50%	53.94%	9.92%	1.00%
2016/4/6	2016/9/5	6323.43	6391.79	1484680	5	14.85%	35.63%	1.08%	5.00%
2016/5/6	2016/6/6	5961.49	6051.86	298320	1	2.98%	35.80%	1.52%	1.00%
2016/6/6	2016/7/7	6051.86	6319.79	330120	1	3.30%	39.61%	4.43%	1.00%
2016/7/7	2016/9/5	6319.79	6391.79	304360	2	3.04%	18.26%	1.14%	2.00%
2016/8/5	2016/9/5	6203.29	6391.79	138040	1	1.38%	16.56%	3.04%	1.00%
2016/9/5	2016/10/13	6391.79	6484.83	233240	1	2.33%	27.89%	1.46%	1.00%
2016/10/13	2016/11/11	6484.83	6583.89	103240	1	1.03%	12.39%	1.53%	1.00%
2016/11/11	2017/9/18	6583.89	6669.45	1113800	10	11.14%	13.37%	1.30%	10.00%
2016/12/12	2017/1/11	6249.08	6331.96	168920	1	1.68%	20.27%	1.33%	1.00%
2017/1/11	2017/3/17	6331.96	6483.25	249280	2	2.44%	14.96%	2.39%	2.00%
2017/2/16	2017/3/17	6359.34	6483.25	140680	1	1.41%	16.88%	1.95%	1.00%
2017/3/17	2017/9/18	6483.25	6669.45	808800	6	8.09%	16.18%	2.87%	6.00%
2017/4/19	2017/9/18	6350.65	6669.45	740160	5	7.40%	17.76%	5.02%	5.00%
2017/5/19	2017/6/21	5974.98	6078.19	180920	1	1.81%	21.71%	1.73%	1.00%
2017/6/21	2017/8/18	6078.19	6347.76	298320	2	2.98%	17.90%	4.43%	2.00%
2017/7/20	2017/8/18	6099.28	6347.76	177920	1	1.78%	21.35%	4.07%	1.00%
2017/8/18	2017/9/18	6347.76	6669.45	153680	1	1.54%	18.44%	5.07%	1.00%
2017/9/18	2018/9/28	6669.45	4800.73	-1604520	12	-16.05%	-16.05%	-28.02%	-28.02%
2017/10/24	2018/11/5	6603.00	4440.83	-2026880	12	-20.27%	-20.27%	-32.75%	-32.75%
2017/11/22	2018/12/4	6439.44	4536.21	-1739600	12	-17.40%	-17.40%	-29.56%	-29.56%
2017/12/21	2018/1/22	6238.50	6347.64	163520	1	1.64%	19.62%	1.75%	1.00%
2018/1/22	2019/2/11	6347.64	4402.87	-1932640	12	-19.33%	-19.33%	-30.64%	-30.64%
2018/2/27	2019/3/12	6010.56	5551.00	-530960	12	-5.31%	-5.31%	-7.65%	-7.65%
2018/3/28	2019/4/11	5973.34	5727.17	253480	12	2.53%	2.53%	-4.12%	-4.12%
2018/5/2	2019/5/15	5855.32	5076.56	1220080	12	12.20%	12.20%	-13.30%	-13.30%
2018/5/31	2019/6/14	5754.47	4795.53	1177280	12	11.77%	11.77%	-16.66%	-16.66%
2018/7/2	2019/3/12	5138.78	5551.00	879720	8	8.80%	13.20%	8.02%	8.00%
2018/7/31	2019/3/12	5188.72	5551.00	856080	7	8.56%	14.68%	6.98%	7.00%
2018/8/29	2019/3/12	4941.96	5551.00	859560	6	8.60%	17.19%	12.32%	6.00%
2018/9/28	2019/3/12	4800.73	5551.00	1116920	5	11.17%	26.81%	15.63%	5.00%
2018/11/5	2018/12/4	4440.83	4536.21	272520	1	2.73%	32.70%	2.15%	1.00%
2018/12/4	2019/3/12	4536.21	5551.00	533000	3	5.33%	21.32%	22.37%	3.00%
2019/1/4	2019/2/11	4210.88	4402.87	171200	1	1.71%	20.54%	4.56%	1.00%
2019/2/11	2019/3/12	4402.87	5551.00	222960	1	2.23%	26.76%	26.05%	1.00%
2019/3/12	2019/4/11	5551.00	5727.17	312080	1	3.12%	37.45%	3.17%	1.00%
2019/4/11	2020/2/24	5727.17	5865.47	1991960	10	19.92%	23.90%	2.41%	10.00%
2019/5/15	2019/9/11	5076.56	5217.29	940680	4	9.41%	28.22%	2.77%	4.00%
2019/6/14	2019/7/15	4795.53	4925.32	216920	1	2.17%	26.03%	2.71%	1.00%
2019/7/15	2019/9/11	4925.32	5217.29	412600	2	4.13%	24.76%	5.93%	2.00%
2019/8/13	2019/9/11	4658.39	5217.29	203560	1	2.04%	24.43%	12.00%	1.00%
2019/9/11	2020/1/16	5217.29	5527.67	652240	4	6.52%	19.57%	5.95%	4.00%
2019/10/18	2019/12/17	4961.81	5236.06	330920	2	3.31%	19.86%	5.53%	2.00%
2019/11/18	2019/12/17	4892.46	5236.06	177400	1	1.77%	21.29%	7.02%	1.00%
2019/12/17	2020/1/16	5236.06	5527.67	143840	1	1.44%	17.26%	5.57%	1.00%
2020/1/16	2020/2/24	5527.67	5865.47	585640	1	5.86%	70.28%	6.11%	1.00%
2020/2/24	2020/7/28	5865.47	6359.66	1181200	5	11.81%	28.35%	8.43%	5.00%
2020/3/24	2020/4/23	5096.04	5357.79	257880	1	2.58%	30.95%	5.14%	1.00%
2020/4/23	2020/6/29	5357.79	5762.44	345800	2	3.45%	20.75%	7.55%	2.00%
2020/5/27	2020/6/29	5369.50	5762.44	175200	1	1.75%	21.02%	7.32%	1.00%
2020/6/29	2020/7/28	5762.44	6359.66	202120	1	2.02%	24.25%	10.36%	1.00%
2020/7/28	2020/8/26	6359.66	6525.88	241120	1	2.41%	28.93%	2.61%	1.00%
2020/8/26	2021/6/9	6525.88	6692.90	918080	9	9.18%	12.24%	2.56%	9.00%
2020/9/24	2020/12/1	6244.64	6426.62	298640	2	2.99%	17.92%	2.91%	2.00%
2020/11/2	2020/12/1	6143.12	6426.62	159760	1	1.60%	19.17%	4.61%	1.00%
2020/12/1	2021/6/9	6426.62	6692.90	523720	6	5.24%	10.47%	4.14%	6.00%
2020/12/30	2021/1/29	6269.25	6346.14	142800	1	1.43%	17.14%	1.23%	1.00%
2021/1/29	2021/5/11	6346.14	6456.04	271360	3	2.71%	10.85%	1.73%	3.00%
2021/3/8	2021/4/7	6256.41	6348.08	125560	1	1.25%	15.07%	1.47%	1.00%

免责声明

本报告中的信息均源于公开可获得的资料，国贸期货力求准确可靠，但不对上述信息的准确性及完整性做任何保证。本报告不构成个人投资建议，也未针对个别投资者特殊的投资目标、财务状况或需要，投资者需自行判断本报告中的任何意见或建议是否



符合其特定状况，据此投资，责任自负。本报告仅向特定客户推送，未经国贸期货授权许可，任何引用、转载以及向第三方传播的行为均构成对国贸期货的侵权，我司将视情况追究法律责任。

期市有风险 入市需谨慎

国贸投研小程序

专注期货，悦享资讯

7X24小时期货资讯，紧跟行情专业解读



长按二维码进入小程序