

股指期货策略研究

Gamma Scalping 策略分析（一） ——基于 BSM 视角

摘要：

本文基于 BSM 模型以及蒙特卡洛模拟对影响 Gamma Scalping 策略期末累积损益的因素进行了详细的分析。

本文首先模拟了 Gamma Scalping 策略在投资期间的交易明细，分析了理想状况下 Gamma Scalping 策略期末资产净值的表达式。结果表明，若期权定价公允，投资者使用标的未来的真实波动率对期权头寸进行连续的 Delta 对冲，那么 Gamma Scalping 策略将不受标的的价格变化路径的影响，其期末收益率与无风险收益率相等。

考虑到实际情况中上述条件无法满足（期权市场定价不公允，标的的未来真实波动率未知，投资者无法做到连续对冲），本文重新假设投资者的对冲操作是离散的，并且对冲波动率、隐含波动率、标的未来真实波动率三者互不相同。随后，基于这一假设，本文推导了 Gamma Scalping 策略期末折现收益的公式并利用蒙特卡洛模拟进行了验证。

结果表明，震荡行情下，Gamma Scalping 策略收益的折现值接近其期权组合公允价值与市面价值之差。当投资者用于 Delta 对冲的波动率与标的未来真实波动率一致的时候，Gamma Scalping 策略期末收益率的方差最小。在趋势行情中，标的价格的持续上涨或者下跌会使得期权组合偏离平值，资产组合整体的 Gamma 值减少，盈利能力下降。

关键词：Gamma Scalping 损益分析，蒙特卡洛模拟，BSM

股指期货研究报告

作者姓名：刘超

liuchao@csc.com.cn
电话：023-86769757
期货投资咨询号：Z0012924

研究助理：王程充

wangchengchong@csc.com.cn
电话：023-86769756
期货从业证书号：F3075975

发布日期：2021 年 2 月 9 日

目录

一、	简介.....	3
二、	Gamma Scalping 策略中损益的数学分析	3
	2.1 理想状况下的 Gamma Scalping 损益公式.....	3
	2.2 Gamma Scalping 的对冲误差	5
三、	蒙特卡洛模拟	7
	3.1 蒙特卡洛模拟算法	7
	3.2 使用真实波动率对冲时 Gamma Scalping 策略的收益情况.....	8
	3.3 使用其他波动率对冲时 Gamma Scalping 策略的收益情况.....	11
四、	研究结论	14
	参考文献.....	14

一、简介

在股票、期货的交易中，投资损益的来源相对单调，投资者们根据自己对市场走势的判断进行低买高卖，或高抛低收，本质上赚取的是价格位移的钱。对于这类市场，方向判断的胜率以及入场时机的选择是其盈利的核心。当前股票、期货市场已经相对成熟，市场中的大行情较少，震荡居多，判断高低点的难度越来越高，多数情况，投资者们都在追涨杀跌。然而，在期权市场，方向不再是全部，影响期权价格的因素较多，期权交易的维度也更高。借助期权价值的非线性特征，期权投资者甚至可以消除标的价格方向的影响，从其他维度赚取收益。

假设投资者持有一个由期权多头与标的资产构成的 Delta 中性资产组合，为使得该资产组合持续保持 Delta 中性，投资者便需要持续进行动态 Delta 对冲。由于期权多头价值变化曲线的凸性（Gamma）始终为正，当标的资产上涨时，资产组合的 Delta 向正数区间偏移，为了使得资产组合回归 Delta 中性，投资者可以选择做空标的资产、卖出看涨期权或者买入看跌期权；当标的资产下挫时，资产组合的 Delta 向负数区间偏移，为了使得资产组合回归 Delta 中性，投资者则可以选择做多标的资产、买入看涨期权或者卖出看跌期权。在此过程中，无论动态 Delta 对冲的形式是什么，总的来看，投资者实现总是低买高卖，实现稳定的价差收益。此时低买高卖的盈利性并不依赖于标的价值变化的趋势，而是取决于标的资产价值变化的剧烈程度。这样利用期权多头凸性，从标的价格的波动中稳定创取价差收益的策略，便称作 Gamma Scalping。

当然，通过 Gamma Scalping 策略实现稳定的低买高卖并不是免费的。从时间维度上看，随着到期日的临近，期权端的时间价值会逐渐衰减。在实行 Gamma Scalping 策略的过程中，只有标的的真实波动率足够大，提供足够多动态对冲的机会，投资者才能在期权到期以前从价格波动中赚取足够多的价差收益，抵消期权端时间价值的损失并留下可观的净利润。在本文中，我们将从数学推理，蒙特卡洛模拟两个方面详细解析 Gamma Scalping 策略盈利的原理，并分析适宜实施该策略的市场状况。

二、Gamma Scalping 策略中损益的数学分析

2.1 理想状况下的 Gamma Scalping 损益公式

广义上来说，Gamma Scalping 策略的形式是非常多样的，无法以一概全。为了保证分析的准确性，本文中我们只讨论符合接下来定义的那一部分。首先，Gamma Scalping 策略的期权持仓既可以只含有看涨或者看跌期权，也可以是任意比例看涨看跌期权的组合。但是，Gamma Scalping 策略资产组合的 Gamma 值需要是正数，否则，投资者便无法从动态对冲中获利。其次，如开头提到的那样，在 Gamma Scalping 策略中，Delta 对冲既可以通过买卖标的来实现，也可以通过期权交易实现。然而，期权交易会同时改变资产组合的多个希腊字母，为简化分析，在接下来的模拟中我们采用买卖标的来实现 Delta 动态对冲。最后，触发 Delta 动态对冲的调仓信号的既可以定时生成也可以由事件触发。由于“事件”的定义较为宽泛，有基于过去标的统计特征（Ad Hoc）的，也有基于效用（e.g. Zakamouline）的，本次为了分析的简便性，我们使用等时间间隔生成的定时信号来决定调仓的时机。

表 1: Gamma Scalping 策略持仓明细

时间点	Delta	标的持仓	无风险资产持仓	期权合约持仓	策略净资产
0 开始	Δ_0	$-\Delta_0 S_0$	$\Delta_0 S_0$	C_0	C_0
1 调整前	Δ_0	$-\Delta_0 S_1$	$\Delta_0 S_0 e^{r\delta}$	C_1	$C_1 + \Delta_0 S_0 e^{r\delta} - \Delta_0 S_1$
调整后	Δ_1	$-\Delta_1 S_1$	$\Delta_0 S_0 e^{r\delta} + (\Delta_1 - \Delta_0) S_1$	C_1	$C_1 + \Delta_0 S_0 e^{r\delta} + (\Delta_1 - \Delta_0) S_1 - \Delta_1 S_1$
2 调整前	Δ_1	$-\Delta_1 S_2$	$\Delta_0 S_0 e^{2r\delta} + (\Delta_1 - \Delta_0) S_1 e^{r\delta}$	C_2	$C_2 + \Delta_0 S_0 e^{2r\delta} + (\Delta_1 - \Delta_0) S_1 e^{r\delta} - \Delta_1 S_2$

	调整后	Δ_2	$-\Delta_2 S_2$	$\Delta_0 S_0 e^{2r\delta} + (\Delta_1 - \Delta_0) S_1 e^{r\delta} + (\Delta_2 - \Delta_1) S_1$	C_2	$C_2 + \Delta_0 S_0 e^{2r\delta}$ $+ (\Delta_1 - \Delta_0) S_1 e^{r\delta}$ $+ (\Delta_2 - \Delta_1) S_1 - \Delta_2 S_2$
...
n	调整后	Δ_n	$-\Delta_n S_n$	$\Delta_0 S_0 e^{nr\delta} + \dots (\Delta_n - \Delta_{n-1}) S_n$	C_n	$C_n +$ $\Delta_0 S_0 e^{nr\delta} + \dots (\Delta_n -$ $\Delta_{n-1}) S_n - \Delta_n S_n$

制图：中信建投期货 金融衍生品部

上表展示了期初资产为 C_0 的 Gamma Scalping 策略的持仓明细。策略采用时间驱动，在相等时间间隔的每一个时间戳的末尾进行调仓，调仓前后的资产净值不变。对于任意一个时间戳 m ，在调仓前，期权头寸为 C_m ，策略持有的标的份额为 $\Delta_{(m-1)}$ ，标的头寸为 $\Delta_{(m-1)} S_m$ ，而目标持仓为 Δ_m ，因此策略需要卖出价值为 $S_m(\Delta_m - \Delta_{(m-1)})$ 的标的，无风险资产仓流入 $S_m(\Delta_m - \Delta_{(m-1)})$ ，到了时间戳 $m+1$ ，在时间 m 处流入的资金以无风险利率增值到 $S_m(\Delta_m - \Delta_{(m-1)})e^{r\delta}$ 。通过迭代推理，我们可以得到时间 n 之时 Gamma Scalping 策略的资产净值为：

$$C_n - \Delta_n S_n + \Delta_0 S_0 e^{nr\delta} + \sum_{i=1}^n e^{(n-i)r\delta} (\Delta_i - \Delta_{i-1}) S_n \quad (2.1.1)$$

假设调仓时间点的间隔无限小，且终止时间点为 T ，我们可以将求和函数改为向后积分函数：

$$C_T - \Delta_T S_T + \Delta_0 S_0 e^{Tr} + \int_0^T e^{(T-x)r} S_x [d\Delta_x] \quad (2.1.2)$$

2.1.2 中积分部分可以变形为：

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{(T-x)r} S_x [d\Delta_x] &= \int_0^T d[e^{(T-x)r} S_x \Delta_x] + e^{(T-x)r} r S_x \Delta_x dx - e^{(T-x)r} \Delta_x dS_x \\ &= \Delta_T S_T - \Delta_0 S_0 e^{Tr} + \int_0^T e^{(T-x)r} (r S_x \Delta_x dx - \Delta_x dS_x) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

根据 BSM 模型，在无风险测度下，标的价格的随机过程为：

$$dS_x = r S_x dx + \sigma S_x dw_x; dw_t = Z\sqrt{dt}, Z \sim N(0,1) \quad (2.1.4)$$

对 2.1.3 式进行变形可得：

$$r S_x \Delta_x dx - \Delta_x dS_x = \sigma S_x \Delta_x dw_x \quad (2.1.5)$$

将 2.1.5 式代入 2.1.3 式的积分部分，最终我们化简得到 Gamma Scalping 策略在 T 时刻的资产净值公式为：

$$C_T + \int_0^T e^{(T-x)r} \sigma S_x \Delta_x dw_x \quad (2.1.6)$$

理想状况下，未来的真实波动率为常数并且已知，期权定价是公允的，若使用以真实波动率计算的 Delta (Δ_{BS}) 对期权进行无缝隙的连续对冲，那么期权与标的的资产组合在任意时刻都是无风险的，并且 T 时刻的资产净值与轨迹无关。这种情况下，资产组合的期末收益率应该是无风险利率，也就是说。

$$C_T + \int_0^T e^{(T-x)r} \sigma S_x \Delta_x dw_x = C_0 e^{rT} \Rightarrow C_0 = C_T e^{-rT} + \int_0^T e^{-xr} \sigma S_x \Delta_x dw_x \quad (2.1.7)$$

根据 Derman 与 Miller [1] 的研究, 由于式中 dw_x 取自风险中性测度, 期望为 0, 无论 Δ 如何取值, 将 2.1.7 式两边同时求期望都可以得到:

$$E \left[C_T e^{-rT} + \int_0^T e^{-xr} \sigma S_x \Delta_x dZ_x \right] = E [C_T e^{-rT}] = C_0 \quad (2.1.8)$$

也就是说, 即使不使用真实波动率对冲, 在期权定价公允的情况下, Gamma Scalping 策略期末收益率的期望还是无风险利率。

2.2 Gamma Scalping 的对冲误差

在实际交易中, 连续对冲无法实现, 属于未来信息的真实波动率无法预知, 我们自行设定用于对冲的波动率 C_{cons} (我们将其简称为对冲波动率) 与真实波动率是存在差异的。并且, 受供需关系, 多空交易成本差异, 市场情绪等因素影响, 期权市面价格与公允价格也往往存在一定差距 (隐含波动率并不等于标的未来真实波动率)。这些现实因素导致实际施行 Gamma Scalping 策略时其收益与理想情况存在对冲误差。接下来, 我们将基于 BSM 模型推导折现后这个误差在 Gamma Scalping 策略整个投资期上的累积值, 推导过程主要参考了 Wilmott[2] 与 Sinclair[3] 的研究成果。考虑到在接下来的推导中, 未来标的真实波动率、隐含波动率以及对冲波动率不一定相等。我们分别以 r (real), i (implied), $cons$ (constant) 作为这三种波动率及其衍生品对应代数的下标, 加以区分。表 2 列出了波动率相关代数的含义。

表 2: 波动率相关代数的含义

数值含义	真实波动率	隐含波动率	对冲波动率
波动率	σ_r	σ_i	σ_{cons}
期权价值	C_r	C_i	C_{cons}
Delta	Δ_r	Δ_i	Δ_{cons}
Gamma	Γ_r	Γ_i	Γ_{cons}

制图: 中信建投期货 金融衍生品部

已知理想状态下的 Gamma Scalping 策略期末累积收益为无风险收益 r , 资产组合当前净值为 π , 对冲误差的微分方程可以写作:

$$HE_{dt} = \pi + d\pi - \pi e^{r dt} \approx d\pi - r\pi dt \approx dC_i - \Delta_{cons} dS - r(C_i - \Delta_{cons} S) dt \quad (2.2.1)$$

对 2.2.1 式变换可得:

$$\begin{aligned} HE_{dt} &= dC_i - \Delta_{cons} dS - r(C_i - \Delta_{cons} S) dt \\ &= [dC_i - dC_{cons}] + [dC_{cons} - \Delta_{cons} dS] - r(C_i - C_{cons}) dt - r(C_{cons} - \Delta_{cons} S) dt \\ &= e^{rt} d[(C_i - C_{cons}) e^{-rt}] + [dC_{cons} - \Delta_{cons} dS] - r(C_{cons} - \Delta_{cons} S) dt \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

2.2.2 式可以拆分为两个部分。其中第一部分可以理解为期权市面价值与基于对冲波动率计算的期权价值之差; 第二部分则是假定期权隐含波动率等于对冲波动率时, Gamma Scalping 策略的对冲误差。Sinclair[3] 曾推导过以隐含波动率进行 Delta 对冲时, 策略的对冲误差公式。该公式的推导正好可以套用在 2.2.2 式第二部分中。在 BSM 模型下, 标的的随机过程满足:

$$S = u_s S dt + \sigma_s S dw_t; dw_t = Z \sqrt{dt}, Z \sim N(0,1) \quad (2.2.3)$$

其中 u_s 与 σ_s 都是常数, 分别代表标的的期望收益率与波动率。已知期权价格与标的价格以及时间存在映射关系, 由伊藤定理可知期权价格的微分公式为:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \Delta dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (\sigma_s)^2 S^2 Z^2 dt; Z^2 \sim \chi^2(d=1) \quad (2.2.4)$$

当 2.2.4 式用于描述实际环境中期权价格变化量时, dS 指代真实标的价格的变动, σ_s 指代未来真实波动率。因此, 2.2.2 式中第二项可以写作:

$$\begin{aligned} dC_{cons} - \Delta_{cons}dS &= \frac{\partial C_{cons}}{\partial t}dt + \Delta_{cons}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{cons}}{\partial S^2}(\sigma_r)^2S^2Z^2dt - \Delta_{cons}dS \\ &= \frac{\partial C_{cons}}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{cons}}{\partial S^2}(\sigma_r)^2S^2Z^2dt \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

对于 2.2.2 式中的第三项, 我们可以引入 BSM 模型偏微分方程进行变换:

$$rC = r\frac{\partial C}{\partial S}S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_r^2S^2 \quad (2.2.6)$$

$$r(C - \Delta S) = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_r^2S^2 \quad (2.2.7)$$

因此, 2.2.2 式中的第三项等价于:

$$r(C_{cons} - \Delta_{cons}S)dt = \left[\frac{\partial C_{cons}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{cons}}{\partial S^2}\sigma_{cons}^2S^2 \right] dt \quad (2.2.8)$$

将 2.2.5 式以及 2.2.8 式带入到 2.2.2 式中, 可得:

$$\begin{aligned} HE_{dt} &= e^{rt}d[(C_i - C_{cons})e^{-rt}] + [dC_{cons} - \Delta_{cons}dS] - r(C_{cons} - \Delta_{cons}S)dt \\ &= e^{rt}d[(C_i - C_{cons})e^{-rt}] + \frac{\partial C_{cons}}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{cons}}{\partial S^2}(\sigma_r)^2S^2Z^2dt - \left[\frac{\partial C_{cons}}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{cons}}{\partial S^2}\sigma_{cons}^2S^2 \right] dt \\ &= e^{rt}d[(C_i - C_{cons})e^{-rt}] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C_{cons}}{\partial S^2}S^2(\sigma_r^2Z^2 - \sigma_{cons}^2)dt \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

直接对 2.2.9 式中的结果求积分相对复杂, 因此, 我们改为求其折现值:

$$PV(HE_{dt}) = d[(C_i - C_{cons})e^{-rt}] + \frac{1}{2}e^{-r(t-t_0)}\frac{\partial^2 C_{cons}}{\partial S^2}S^2(\sigma_r^2Z^2 - \sigma_{cons}^2)dt; \Gamma_{cons} = \frac{\partial^2 C_{cons}}{\partial S^2} \quad (2.2.10)$$

对 2.2.10 式在整个投资期上积分, 可得累积折现对冲误差为:

$$PV(HE_{total}) = \int_{t_0}^T d[(C_i - C_{cons})e^{-rt}] + \frac{1}{2}\int_{t_0}^T e^{-r(t-t_0)}\Gamma_{cons}S^2[\sigma_r^2Z^2 - \sigma_{cons}^2]dt \quad (2.2.11)$$

$$PV(HE_{total}) = C_{cons,t_0} - C_{i,t_0} - (C_{cons,T} - C_{i,T}) + \frac{1}{2}\int_0^T e^{-r(t-t_0)}\Gamma_{cons}S^2[\sigma_r^2Z^2 - \sigma_{cons}^2]dt \quad (2.2.12)$$

在靠近结算日之时, 期权价格将逼近其内涵价值, 同一标的且行权价一致的期权内涵价值一致。也就是说:

$$\lim_{m \rightarrow T} C_{cons,m} - C_{i,m} = 0 \quad (2.2.13)$$

最终, Gamma Scalping 策略的累积折现对冲误差可以写作:

$$PV(HE_{total}) = C_{cons,t_0} - C_{i,t_0} + \frac{1}{2}\int_0^T e^{-r(t-t_0)}\Gamma_{cons}S^2[\sigma_r^2Z^2 - \sigma_{cons}^2]dt; E(Z^2) = 1 \quad (2.2.14)$$

考虑到实际交易中连续对冲无法实现, 2.2.14 中的积分项应使用求和近似, 所以, 累积折现对冲误差应变换为:

$$PV(HE_{total}) = C_{cons,t_0} - C_{i,t_0} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e^{-r(t-t_0)} \Gamma_{cons} S^2 [\sigma_r^2 Z^2 - \sigma_{cons}^2] \delta; \delta = t_i - t_{i-1} \quad (2.2.15)$$

其中， δ 代表了两次调仓间的时间间隔。Gamma Scalping 策略的整体折现收益由本金在无风险利率上的收益与累积对冲误差组成，前者以无风险利率折现后的收益为 0。因此，Gamma Scalping 的期末折现收益与累积折现对冲误差是相等的：

$$PV(HE_{total}) = PV(P\&L_{total}) \quad (2.2.16)$$

三、蒙特卡洛模拟

观察 2.2.14 式，当真实波动率与对冲波动率一致的时候， $[\sigma_r^2 Z^2 - \sigma_{cons}^2]$ 的期望为 0：

$$\sigma_r^2 = \sigma_{cons}^2; E[\sigma_r^2 Z^2 - \sigma_{cons}^2] = 0 \quad (3.0.1)$$

若调仓频率足够高，在自我中和的效应下，2.2.15 式中的累加项对策略资产折现净值变化曲线扰动较小，Gamma Scalping 策略期末的收益实际主要由 $C_{cons,t_0} - C_{i,t_0}$ 决定。当真实波动率大于(小于)对冲波动率时，累加项长期为正(负)， $e^{(-r(t-t_0))} \Gamma_{cons} S^2$ 的波动性便被传递到了 Gamma Scalping 策略的资产折现净值变化曲线中。因此，我们可以得出两个简单的推论，其一，当对冲波动率与真实波动率完全一致的时候，Gamma Scalping 策略期末折现收益率的期望为期初期权的公允价值与市面价格之差。其二，当对冲波动率与真实波动率完全一致的时候，Gamma Scalping 策略期末折现收益率的方差最小，并且，提高调仓频率可以有效降低期末策略收益率的方差。由于 Gamma Scalping 累积误差公式过于复杂且存在路径依赖的问题，我们无法简单的通过公式映射去验证以上推论，然而，我们可以模仿 Derman 与 Miller [1]使用蒙特卡洛模拟的方式去获得特定参数下 Gamma Scalping 折现收益的分布。

3.1 蒙特卡洛模拟算法

在 BSM 假设当中，标的资产的价格变化满足随机过程：

$$S = u_s S dt + \sigma_s S dw_t; dw_t = Z \sqrt{dt}, Z \sim N(0,1) \quad (3.1.1)$$

由伊藤引理可得：

$$\begin{aligned} d \ln S &= \frac{\partial \ln S}{\partial t} dt + \frac{\partial \ln S}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \ln S}{\partial S^2} (\sigma_s)^2 dt = \frac{1}{S} (u_s S dt + \sigma_s S dw_t) - \frac{1}{2} \frac{1}{S^2} (\sigma_s S)^2 dt \\ &= (u_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2) dt + \sigma_s dw_t \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

对 3.1.2 式两边同时进行积分可得：

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} d \ln S = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2) dt + \sigma_s dw_t \quad (3.1.3)$$

$$\ln S_{t_i} - \ln S_{t_{i-1}} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (u_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2) dt + \sigma_s dw_t \quad (3.1.4)$$

将 3.1.4 式两边同时引入自然指数函数，我们便获得了标的价值 S 在时间轴上的迭代关系：

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} (u_s - \frac{1}{2} \sigma_s^2) dt + \sigma_s dw_t} \quad (3.1.5)$$

由于 u_s 与 σ_s 都是常数，当时间间隔较小时，3.1.4 式还可以写作：

$$S_{t_i} = S_{t_{i-1}} e^{(u_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2)\delta + \sigma_s Z\sqrt{\delta}}; \delta = t_i - t_{i-1} \quad (3.1.6)$$

根据 3.2.5 式，我们只需要设定好标的价值初始值 S_0 、标的期望收益率 u_s 与标的波动率 σ_s ，就能随机生成若干条标的价值变化路径。其中， δ 的大小决定了标的价值变化路径上时间戳的紧凑度， δ 越小，路径时间戳间隔越短，蒙特卡洛估算的结果越精确。当然，这也意味着需要投入更多的计算成本。通过在足够多的标的价值变化路径模拟 Gamma Scalping 策略，我们便能获得一个 Gamma Scalping 策略期末折现损益的大致分布，了解其收益以及风险的特征。

在本文的蒙特卡洛模拟中，Gamma Scalping 策略的期权持仓采用一组行权价相同的平值的看涨看跌合约（期权跨式组合），但其模拟结果对其他期权多头组合同样适用。

3.2 使用真实波动率对冲时 Gamma Scalping 策略的收益情况

首先我们统一设定蒙特卡洛模拟中标的价值初始值 S_0 为 1000，行权价 1000，终止时间为 T 为 1，无风险利率为 0（期末收益与折现后期末收益一致）。假设真实波动率、隐含波动率、对冲波动率三者完全一致，等于 0.2。模拟结果如下：

Gamma Scalping 策略模拟 1 $\sigma_{rv} = \sigma_{iv} = \sigma_{hedge} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$, 调仓间隔为 100

图 1：资产折现净值变化曲线

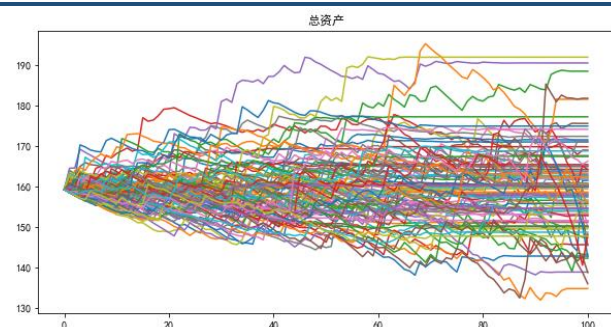
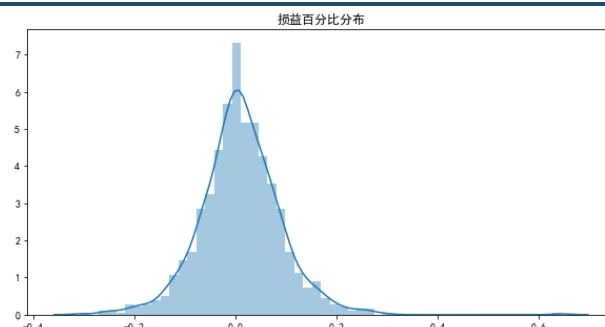


图 2：期末折现收益率分布



制图：中信建投期货 金融衍生品部

Gamma Scalping 策略模拟 2 $\sigma_{rv} = \sigma_{iv} = \sigma_{hedge} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$, 调仓间隔为 1

图 3：资产折现净值变化曲线

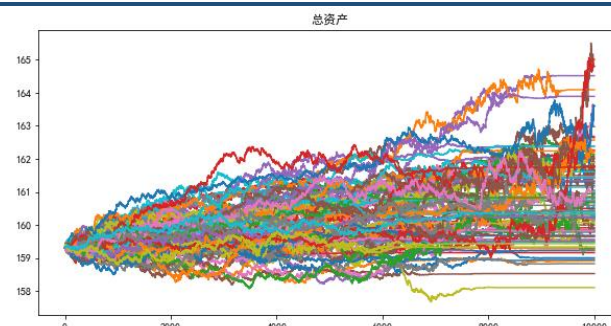
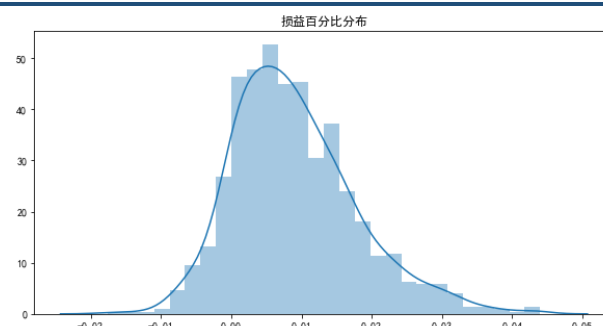


图 4：期末折现收益率分布



制图：中信建投期货 金融衍生品部

表 3：Gamma Scalping 策略模拟 $\sigma_{rv} = \sigma_{iv} = \sigma_{hedge} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$

	调仓间隔为 =100	调仓间隔 =1
期末折现收益率期望	1.044%	0.900%
期末折现收益率方差	8.054%	0.885%

制表：中信建投期货 金融衍生品部

如图 1、图 2、图 3、图 4 所示，当三个波动率相同的时候，与我们之前的推导一致，Gamma Scalping 策略的期末期望收益率等于 0，且方差非常小。对比调仓间隔为 1 与调仓间隔为 100 个时间戳的情况可以发现，提高调仓频率有效减少了策略期末折现收益率的方差，这是由于 2.2.15 中累加项自我中和的频率提高了。

接下来，我们设定隐含波动率依旧为 0.2，令真实波动率与对冲波动率等于 0.4。也就是说，市场波动率被低估了，期权定价不公平，然而我们依旧按真实波动率对冲。

Gamma Scalping 策略模拟 3 $\sigma_{rv} = \sigma_{hedge} = 0.4, \sigma_{iv} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$, 调仓间隔为 100

图 5：资产折现净值变化曲线

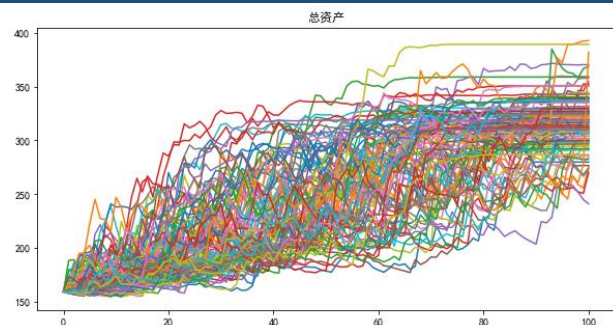
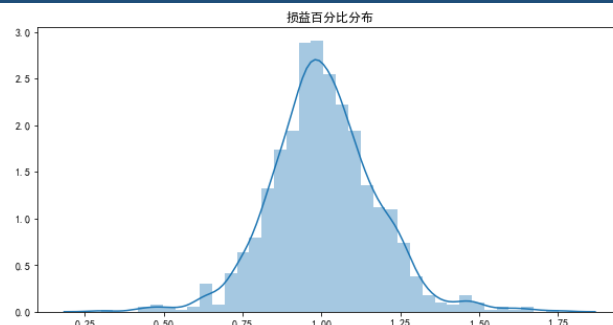


图 6：期末折现收益率分布



制图：中信建投期货 金融衍生品部

Gamma Scalping 策略模拟 4 $\sigma_{rv} = \sigma_{hedge} = 0.4, \sigma_{iv} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$, 调仓间隔为 1

图 7：资产折现净值变化曲线

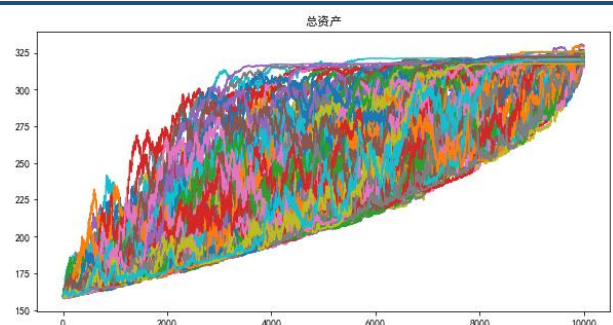
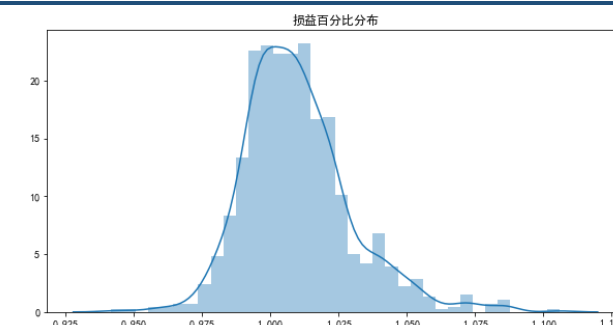


图 8：期末折现收益率分布



制图：中信建投期货 金融衍生品部

表 4: Gamma Scalping 策略模拟 $\sigma_{rv} = \sigma_{hedge} = 0.4, \sigma_{iv} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$

	调仓间隔为 =100	调仓间隔 =1
期末折现收益率期望	100.769 %	101.00%
期末折现收益率方差	16.964 %	1.985 %

制表：中信建投期货 金融衍生品部

如图 5、图 6、图 7、图 8 所示，无论调仓频率为 100 或者 1，Gamma Scalping 策略的期末折现收益率期望都约为 100%。而在满足先前设定条件 ($S=1000, K=1000, \sigma_{rv}=\sigma_{cons}=0.4$) 的情况下，期初期权公允价值与市场价值的百分比差值约 99%。两者十分相近，符合我们之前的预期。同时，与之前的模拟类似，对比调仓间隔为 1 与调仓间隔为 100 两个策略的期末收益率分布可以发现，提高调仓频率也有效减少了策略期末收益率的方差。调仓间隔为 1 的策略折现资产净值变化曲线收敛性较高，具有明显的上下界。并且，图 4 中资产折现净值变化曲线的上下界是可以公式表达的，对此，Derman 与 Miller [1] 已在其研究中给出了详细的推导。

对于任意一个初始净资产为 A，对冲波动率等于真实波动率的 Gamma Scalping 策略，其时刻 m 的策略折现

资产净值变化曲线可以拆解为本金为 A 的无风险资产的变化曲线与对冲误差的累积曲线。

$$\pi_m = Ae^{r(m-t_0)} + HE_{total} \quad (3.2.1)$$

由于折现后无风险资产随时间变化的曲线为水平直线，在计算上下界时，我们只需要考虑对冲误差的累积曲线：

$$HE_{total} = dC_r - \Delta_{cons}dS - r(C_r - \Delta_{cons}S)dt \quad (3.2.2)$$

根据之前的证明，在期权定价公允且对冲波动率与真实波动率完全一致的时候，Gamma Scalping 的对冲误差为 0，因此：

$$HE_{dt} = dC_r - \Delta_r dS - r(C_r - \Delta_r S)dt = 0 \Rightarrow dC_r - \Delta_r dS = r(C_r - \Delta_r S)dt \quad (3.2.3)$$

$$\Delta_r dS - r\Delta_r S dt = dC_r - rC_r dt \quad (3.2.4)$$

将 3.2.4 带入到 3.2.2 中可得

$$HE_{dt} = d\pi - r\pi dt = dC_i - \Delta_r dS - r(C_i - \Delta_r S)dt = (C_i - rC_i dt) - (C_r - rC_r dt) \quad (3.2.5)$$

$$HE_{dt} \approx e^{rt}\{e^{-rt}[(C_i - rC_i dt) - (C_r - rC_r dt)]\} = e^{rt}d[e^{-rt}(C_i - C_r)] \quad (3.2.6)$$

因此折现累积误差的微分公式为：

$$PV(HE_{dt}) = e^{-r(t-t_0)}e^{rt}d[e^{-rt}(C_i - C_r)] = e^{rt_0}d[e^{-rt}(C_i - C_r)] \quad (3.2.7)$$

对 3.2.7 式进行从 t_0 处到任意大于 t_0 的时间点 m 进行积分：

$$PV(HE_{total}) = e^{rt_0} \int_{t_0}^m d[e^{-rt}(C_i - C_r)] = e^{-r(t-t_0)}(C_i - C_r)|_{m \sim t} \quad (3.2.8)$$

对任意一个时间点 m ，Gamma Scalping 策略的积累折现对冲误差为：

$$HE_{total,m} = e^{-r(t-t_0)}(C_i - C_r)|_{m \sim t} = (C_{r,t_0} - C_{i,t_0}) - e^{-r(m-t_0)}(C_{r,m} - C_{i,m}) \quad (3.2.9)$$

期权在临近行权日的时候，其价格都会逼近它的实值。即使波动率设定有差异，期权的公允价值也会向市面价值靠近。也就是说：

$$\lim_{m \rightarrow T} C_{i,m} - C_{r,m} = 0 \quad (3.2.10)$$

$$\sup[PV(HE_{total})] = C_{r,t_0} - C_{i,t_0} \quad (3.2.11)$$

因此，当对冲波动率等于真实波动率时，Gamma Scalping 策略积累折现对冲误差的上界是期初期权公允价值与市面价值之差。3.2.9 的下界则可以通过求导法获得，由于用于计算期权价格的无风险利率、行权价、波动率、存续时间都是事先规定好的， $C_{r,m} - C_{i,m}$ 的值主要受到 S 影响。令 $C_{r,m} - C_{i,m}$ 相对于标的价格 S 的一阶导数为 0 可得 $C_{r,m} - C_{i,m}$ 的最大值为：

$$\inf(HE_{total,m}) = C_{r,t_0} - C_{i,t_0} - \sum_{i=1}^N 2Ke^{-rm} \widehat{Delta}_i ; \widehat{Delta} = \left[N \left(\frac{1}{2} (\sigma_R - \sigma_i) \sqrt{m} \right) - \frac{1}{2} \right] \quad (3.2.12)$$

由于 Gamma Scalping 策略中期权多头可能含有多个参数不同的期权，不同期权的 \widehat{Delta} 不同，所以 3.2.14 式使用了累加。将积累折现对冲误差与期初本金相加可得策略的资产折现净值在 m 时刻的上下界为：

$$\sup[PV(HE_{total})] = C_{r,t_0} - C_{i,t_0} + C_{i,t_0} = C_{r,t_0} \quad (3.2.13)$$

$$\inf(HE_{total,m}) = C_{r,t_0} - C_{i,t_0} - \sum_{i=1}^N 2Ke^{-rm} \widehat{Delta}_i + C_{i,t_0} = C_{r,t_0} - \sum_{i=1}^N 2Ke^{-rm} \widehat{Delta}_i \quad (3.2.14)$$

将 3.2.13 式与 3.2.14 式作图，其曲线与图 7 上下界完全一致，证明完毕。

Gamma Scalping 策略模拟 5 $\sigma_{rv} = \sigma_{hedge} = 0.4, \sigma_{iv} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$, 理论上下界

图 9：资产折现净值变化曲线

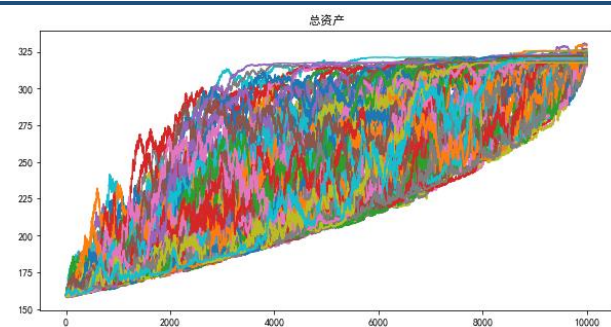
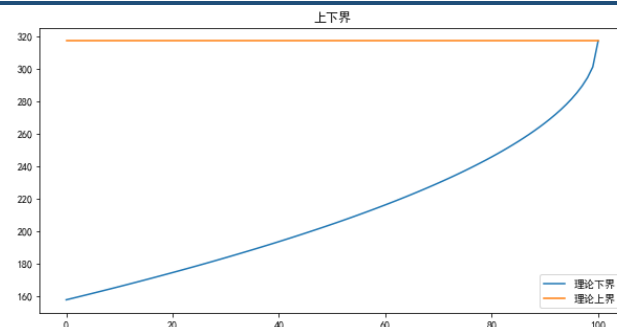


图 10：资产折现净值变化曲线上下界



制图：中信建投期货 金融衍生品部

3.3 使用其他波动率对冲时 Gamma Scalping 策略的收益情况

接下来，我们同样设定隐含波动率依旧为 0.2，令真实波动率为 0.4，但让对冲波动率为 0.3。也就是说，市场波动率被低估了，并且对冲波动率与真实波动率不一致。

Gamma Scalping 策略模拟 6 $\sigma_{rv} = 0.4, \sigma_{hedge} = 0.3, \sigma_{iv} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$. 调仓间隔为 100

图 11：资产折现净值变化曲线

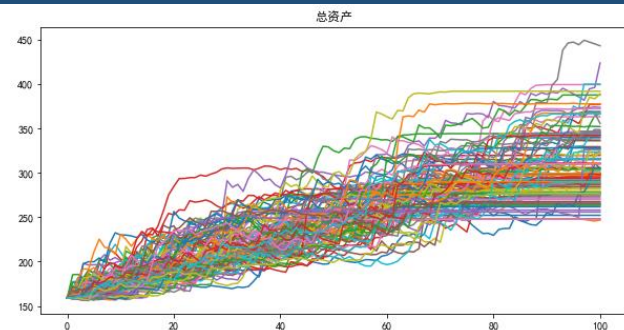
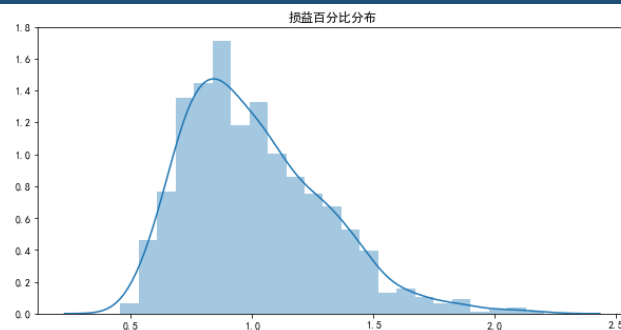


图 12：期末折现收益率分布



制图：中信建投期货 金融衍生品部

Gamma Scalping 策略模拟 7 $\sigma_{rv} = 0.4, \sigma_{hedge} = 0.3, \sigma_{iv} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$. 调仓间隔为 1

图 13：资产折现净值变化曲线

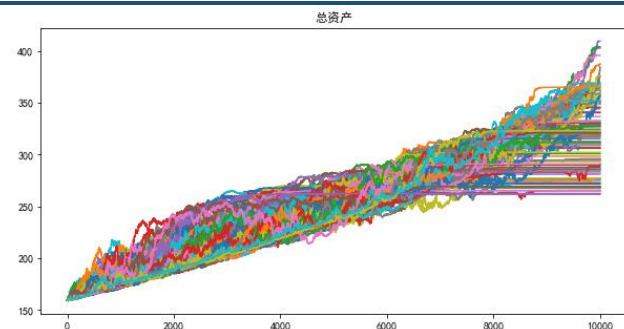
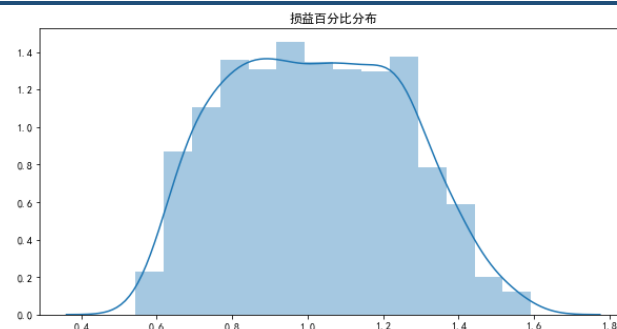


图 14：期末折现收益率分布



制图：中信建投期货 金融衍生品部

表 5: Gamma Scalping 策略模拟 1 $\sigma_{rv} = 0.4, \sigma_{hedge} = 0.3, \sigma_{iv} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$

	调仓间隔为 =100	调仓间隔 =1
期末折现收益率期望	101.074%	102.000%
期末折现收益率方差	28.779%	22.868 %

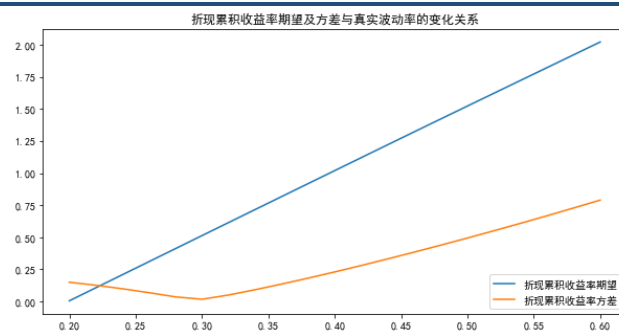
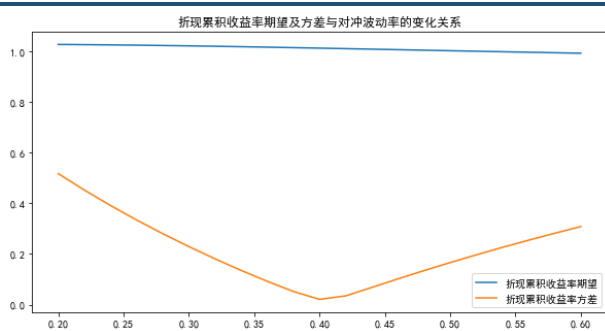
制图：中信建投期货 金融衍生品部

正如我们预期的那样，当真实波动率与对冲波动率不一致的时候，Gamma Scalping 策略对标的本身变化的风险暴露未能得到充分对冲，即使提高调仓频率，策略期末折现收益率的方差也没有明显的降低。同时，与 Sinclair[3] 的模拟结果一致，将对冲波动率从 0.4 降低到 0.3 并未对策略期末折现收益率的期望造成大幅影响。回顾一下累积折现对冲误差的公式：

$$PV(HE_{total}) = C_{cons,t_0} - C_{i,t_0} + \frac{1}{2} \int_0^T e^{-r(t-t_0)} \Gamma^{cons} S^2 [\sigma_r^2 Z^2 - \sigma_{cons}^2] dt; E(Z^2) = 1 \quad (3.3.1)$$

整体来看，当对冲波动率变化时， C_{cons,t_0} 与 C_{i,t_0} 的差值与累加项中 $\sigma_r^2 Z^2 - \sigma_{cons}^2$ 变化的方向相反，相互抵消，导致对冲波动率的变化对策略期末折现收益率影响较小。

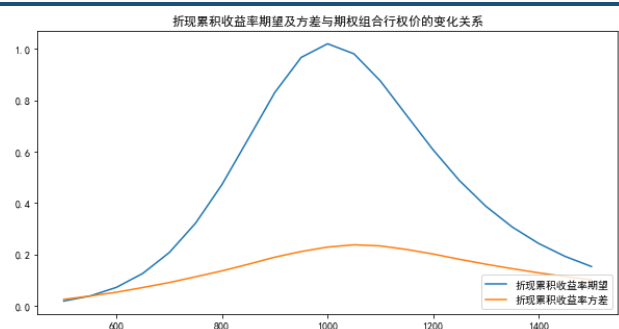
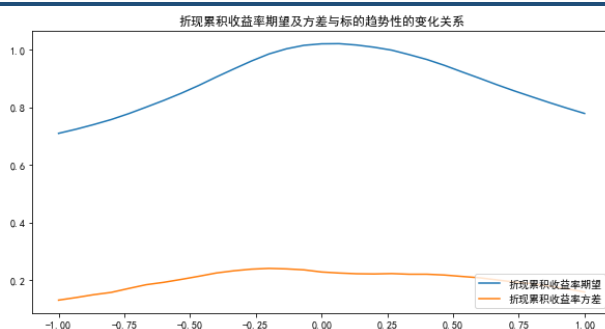
Gamma Scalping 策略模拟 8 $\sigma_{rv} = 0.4$ (左图), $\sigma_{hedge} = 0.3$ (右图), $\sigma_{iv} = 0.2, r = u = 0; num_{simulation} = 10000$, 调仓间隔为 100

图 15: 期末折现收益率期望及方差与对冲波动率的变化关系 **图 16: 期末折现收益率期望及方差与真实波动率的变化关系**


制图：中信建投期货 金融衍生品部

如 16 图所示，Gamma Scalping 策略期末折现收益率的期望主要受真实波动率与隐含波动率之间的关系影响，真实波动率越大，隐含波动率越小，Gamma Scalping 策略期末期望收益率的期望越高。对冲波动率的大小对 Gamma Scalping 策略期末收益率的期望影响甚微，然而，只有当对冲波动率与真实波动率一致之时，Gamma Scalping 策略期末收益率的方差是最小的。因此，我们能通过使用波动率预测工具减少对对冲波动率与真实波动率之间的差值来降低 Gamma Scalping 策略期末收益率的波动性。

Gamma Scalping 策略模拟 9 $\sigma_{rv} = 0.4, \sigma_{hedge} = 0.3, \sigma_{iv} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$, 调仓间隔为 1

图 17: 期末折现收益率期望及方差与标的趋势性 u 的变化关系 **图 18: 期末折现收益率期望及方差与行权价的变化关系**


制图：中信建投期货 金融衍生品部

 Gamma Scalping 策略模拟 $10\sigma_{rv} = 0.4, \sigma_{hedge} = 0.5, \sigma_{iv} = 0.2; r = u = 0; num_{simulation} = 10000$, 调仓间隔为 1

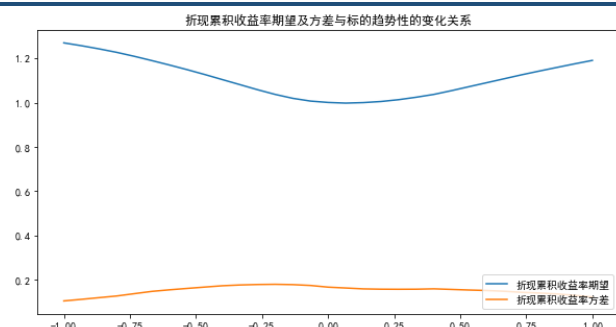
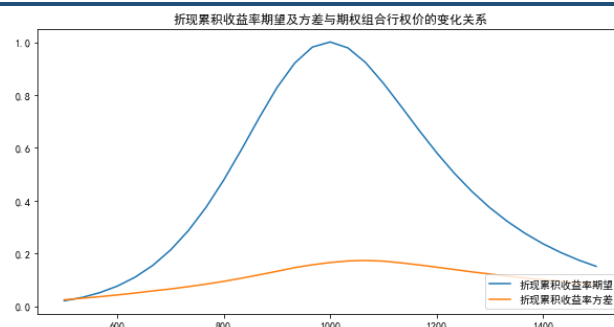
 图 19: 期末折现收益率期望及方差与标的趋势 u 的变化关系


图 20: 期末折现收益率期望及方差与行权价的变化关系



制图：中信建投期货 金融衍生品部

图 21: 不同波动率环境下 Delta 与标的价格的变化曲线

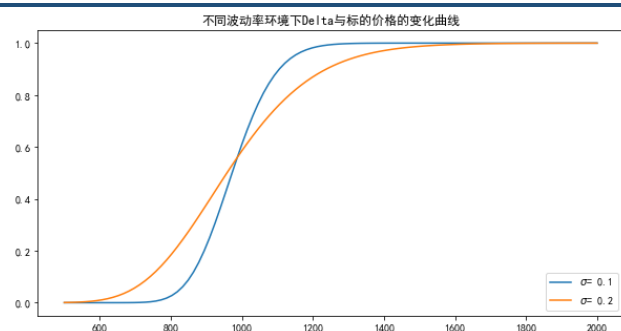
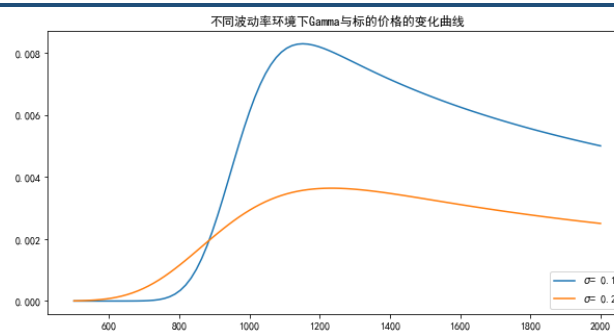


图 22: 不同波动率环境下 Gamma 与标的价格的变化曲线



制图：中信建投期货 金融衍生品部

Gamma Scalping 策略的主要收益来源于期权收益曲线的凸性，也就是 Gamma 值。理论上，Gamma 值在期权处于平值价位的时候最大，若标的价值在投资过程当中具有趋势，使得期权偏离平值，那么 Gamma Scalping 的收益便会降低。参考图 18，图 20 可以发现，持有虚值期权组合或者实值期权组合的 Gamma Scalping 策略盈利能力不如持有平值期权组合的 Gamma Scalping 策略。

从图 17，图 19 可以看出，在对冲波动率高于标的未来真实波动率之时，Gamma Scalping 策略收益随标的趋势性增加而增加，在对冲波动率高于标的未来真实波动率之时，Gamma Scalping 策略收益随标的趋势性增加而减少。这是因为若对冲波动率与标的未来真实波动率不一致，Gamma Scalping 策略的实际 delta 不为 0，其最终收益对标的价格的变动有风险暴露。这部分风险暴露主要由 Gamma Scalping 策略中期权持仓的实际 delta 与对冲时所采用的 delta 之差决定。如图 22 所示，Gamma 值随标的的增加而先增后减，在平值附近取得最大值，因此 Delta 值在平值附近的变化最为剧烈。波动率越小，Gamma 曲线最大值越高，与之对应，Delta 在平值附近的上升速度也越大。因此，持有平值期权时或跨市组合多头时，若标的上行，超过行权价，则基于较低波动率计算的 Delta 将超过基于较高波动率计算的 Delta；若标的下行，低于行权价，则基于较低波动率计算的 Delta 将超过基于较高波动率计算的 Delta。

在图 17 中，当对冲波动率若低于真实波动率，期权组合多头的 Delta 在标的上行时小于对冲 Delta，在标的下行时高于对冲 Delta，资产组合整体的 Delta 方向与标的趋势相反，无论标的向哪个方向移动，策略的资产组合整体上都会亏损。在图 19 中，对冲波动率若高于真实波动率，期权组合多头的 Delta 在标的上行时大于对冲 Delta，在标的下行时低于对冲 Delta，这使得组合整体的 Delta 方向与标的趋势相同，无论标的向哪个方向移动，策略的资产组合整体上都会盈利。因此，通过适当提高对冲波动率，在面对趋势性行情的时候可以提高 Gamma Scalping 策略的盈利能力。

四、研究结论

从之前的模拟中可以看出，Gamma Scalping 策略的收益主要依赖于标的市场的波动性，通常只有当未来真实波动率高于隐含波动率之时，Gamma Scalping 策略才具有盈利能力。在震荡行情中，Gamma Scalping 的期望盈利主要取决于市场未来真实波动率被低估的程度，市场未来真实波动率与隐含波动率的差距越大，Gamma Scalping 策略能获得的利润越大。同时，我们实施对冲时所使用的对冲波动率与未来真实波动率之间的差异决定了 Gamma Scalping 策略未来收益的波动性，对冲波动率与真实波动率之间的差异越小，Gamma Scalping 策略的期末收益越稳定。在趋势行情中，标的价格的持续上涨或者下跌会使得期权组合偏离平值，资产组合整体的 Gamma 值减少，盈利能力下降。为弥补这部分损失，投资者可以适当提高对冲波动率，当对冲波动率高于真实波动率之时，无论标的价值持续上涨或者下跌，Gamma Scalping 策略都能从其趋势中获利。

本文中所有对于 Gamma Scalping 策略的讨论都是基于 BSM 模型的理想假设。市场的真实情况相对这些设定存在诸多差异。因此，本文中得出的结论并不一定适用于实际交易，其效用只限于提供一定参考。在实际进行 Gamma Scalping 策略时，投资者还需根据市场情况以及自身风险与收益的需求对策略实行的多处细节进行设定。比如，在选择对冲波动率的时候，投资者需要判断市场所处的状态；在选择对冲频率上，投资者需要考虑交易成本与期末收益稳定性上的对立；若标的行情具有趋势，使得期权端的虚实程度发生变化，投资者或许还需要考虑如何对期权端进行调整。

参考文献

- [1] Derman, E., & Miller, M. B. (2016). *The Volatility Smile*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc.
- [2] Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott On Quantitative Finance*. The Atrium, Southern Gate, Chichester, England: John Wiley & Sons, Inc.
- [3] Sinclair, E. (2013). *Volatility Trading*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc.

联系我们

中信建投期货总部

地址：重庆市渝中区中山三路107号上站大楼平街11-B，名义层11-A，8-B4,C

电话：023-86769605

中信建投期货有限公司上海分公司

地址：中国（上海）自由贸易试验区浦电路 490 号，世纪大道 1589 号 8 楼 10-11

单元

电话：021-68765927

中信建投期货有限公司湖南分公司

地址：长沙市芙蓉区五一大道 800 号中隆国际大厦 903

电话：0731-82681681

南昌营业部

地址：南昌市红谷滩新区红谷中大道 998 号绿地中央广场 A1#办公楼-3404 室

电话：0791-82082702

中信建投期货有限公司河北分公司

地址：廊坊市广阳区吉祥小区 20-11 门市一至三层、20-1-12 号门市第三层。

电话：0316-2326908

漳州营业部

地址：漳州市龙文区九龙大道以东漳州碧湖万达广场 A2 地块 9 幢 1203 号

电话：0596-6161588

西安营业部

地址：西安市高新区高新路 56 号电信广场裙楼 6 层北侧 6G

电话：029-89384301

北京朝阳门北大街营业部

地址：北京市东城区朝阳门北大街 6 号首创大厦 207 室

电话：010-85282866

北京北三环西路营业部

地址：北京市海淀区中关村南大街 6 号 9 层 912

电话：010-82129971

武汉营业部

地址：武汉市江汉区香港路 193 号中华城 A 写字楼（阳光城·央座）1306/07 室

电话：027-59909521

中信建投期货有限公司杭州分公司

地址：杭州市上城区庆春路 137 号华都大厦 811、812 室

电话：0571-28056983

太原营业部

地址：太原市小店区长治路 103 号阳光国际商务中心 A 座 902 室

电话：0351-8366898

北京国贸营业部

地址：北京市朝阳区光华路 8 号和乔大厦 A 座向东 20 米

电话：010-85951101

中信建投期货有限公司济南分公司

地址：济南市历下区冻源大街 150 号中信广场 A 座十层 1016、1018、1020 室

电话：0531-85180636

中信建投期货有限公司大连分公司

地址：辽宁省大连市沙河口区会展路 129 号大连国际金融中心 A 座大连期货大厦

2901、2904、2905 室

电话：0411-84806316

中信建投期货有限公司河南分公司

地址：郑州市未来大道 69 号未来大厦 2205、2211、1910 房

电话：0371-65612397

广州东风中路营业部

地址：广州市越秀区东风中路 410 号时代地产中心 20 层自编 2004-05 房

电话：020-28325286

重庆龙山一路营业部

地址：重庆市渝北区龙山街道龙山一路 5 号扬子江商务小区 4 幢 24-1

电话：023-88502020

成都营业部

地址：成都市武侯区科华北路 62 号（力宝大厦）1 栋 2 单元 18 层 2、3 号

电话：028-62818701

中信建投期货有限公司深圳分公司

地址：深圳市福田区深南大道和泰然大道交汇处绿景纪元大厦 11I

电话：0755-33378759

上海徐汇营业部

地址：上海市徐汇区斜土路 2899 甲号 1 幢 1601 室

电话：021-64040178

南京营业部

地址：南京市黄埔路 2 号黄埔大厦 11 层 D1、D2 座

电话：025-86951881

中信建投期货有限公司宁波分公司

地址：浙江省宁波市鄞州区和济街 180 号国际金融中心 F 座 1809 室

电话：0574-89071681

合肥营业部

地址：合肥市包河区马鞍山路 130 号万达广场 C 区 6 幢 1903、1904、1905 电话：

0551-2889767

广州黄埔大道营业部

地址：广州市天河区黄埔大道西 100 号富力盈泰大厦 B 座 1406

电话：020-22922102

上海浦东营业部

地址：上海自由贸易试验区世纪大道 1777 号 3 楼 F1 室

电话：021-68597013

重要声明

本报告中的信息均来源于公开可获得资料，中信建投期货力求准确可靠，但对这些信息的准确性及完整性不做任何保证，据此投资，责任自负。本报告不构成个人投资建议，也没有考虑到个别客户特殊的投资目标、财务状况或需要。客户应考虑本报告中的任何意见或建议是否符合其特定状况。

全国统一客服电话：400-8877-780

网址：www.cfc108.com