

期权价格收益分解

方正中期研究院 牛秋乐、冯世佃

摘要:

期权价格主要受标的资产价格、波动率、无风险利率、期权剩余到期时间等因素影响。但在实际交易中,投资者往往只注意到合约的盈亏,却不知背后各个影响因素的风险。譬如,一些投资者经常会发生看对方向,然而依旧亏损的情况。而希腊字母能刻画期权各个影响因素对期权价格的影响,能让投资者不仅能知其然,还能知其所以然,从而更好的进行风险管理。本文主要介绍期权希腊字母(Greeks)的相关内容,并介绍其在期权价格收益分解中的应用。

首先,我们知道衍生品价格受多种因素影响,因此可以看成是一个多元函数

$$V(S, K, \sigma, T, t, r)$$

因此,对于任意一个衍生品,可用 Taylor 展开:

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} (\Delta S)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial S} \Delta t \Delta S + \dots$$

其中, S 为标的物价格服从对数正态分布; K 为行权价格; σ 为波动率; T 为到期日; t 为当前时刻; r 为无风险利率。

若令

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \text{Gamma} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}, \text{Theta} = \frac{\partial V}{\partial t}, \text{Vega} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}, \text{Rho} = \frac{\partial V}{\partial r}$$

则每个希腊字母就可以看成是度量期权头寸某种特定风险。

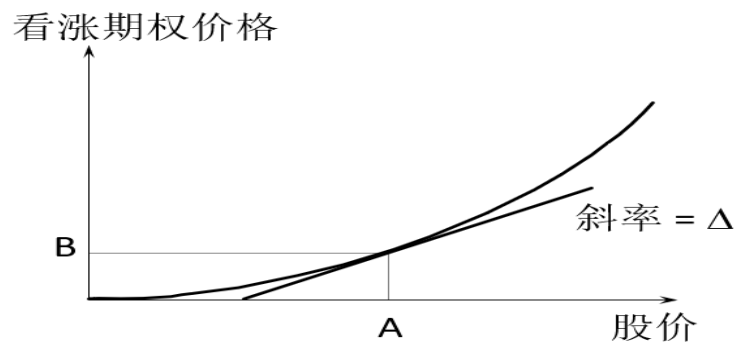
Delta

Delta 表示期权或期权组合对标的资产的敏感性,它表示期权或期权组合价格对标的资产价格变化的变化率。即定义为期权或期权组合价格 V 关于标的资产价格 S 的一阶导数。

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

因此 Delta 可表示为期权价格曲线在某一点的斜率。

图 1: Delta 值表示期权价格曲线斜率



资料来源：方正中期研究院整理

本文期权定价均在 BS 模型的框架下。因此，由 Black-Scholes 公式可知，看涨期权价格有：

$$C(S, t) = SN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)$$

通过推导可以得到：

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

此外，由看涨、看跌期权平价公式

$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$$

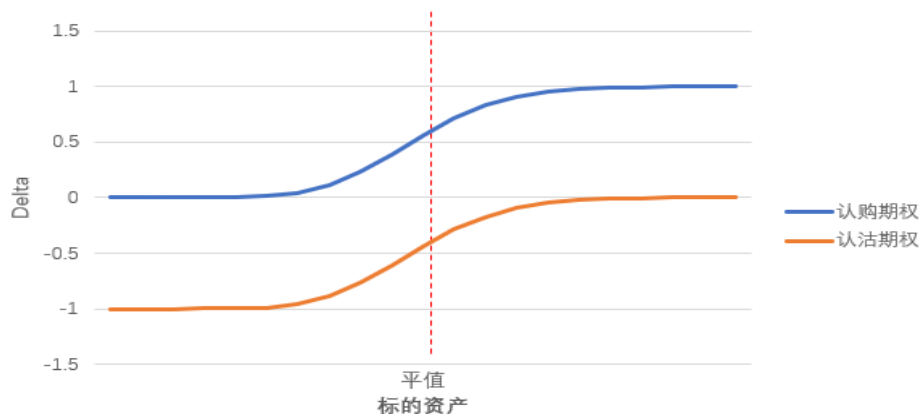
得到

$$\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} - 1 = N(d_1) - 1$$

即

$$\Delta_{\text{call}} - \Delta_{\text{put}} = 1$$

图 2：Delta 值随标的资产变化情况



资料来源：方正中期研究院整理

从上面推导和图形中，可以看到看涨期权 Delta 处于 0-1 之间，而看跌期权 Delta 处于-1-0 之间，平值看涨期权的 Delta 为 0.5，平值看跌期权的 Delta 为-0.5。标的资产、行权价、到期日均相同的看涨和看跌期权 Delta 的差恒为 1。

另外，还可以看到标的资产价格越高，那么看涨期权的价格也将越高，这与我们直观上的感受也是相同的。事实上，在 Black-Scholes 模型的假定下，通过数学推导，还可以发现 Delta 还表示期权到期行权的概率，或者说合约到期时，期权合约是实值的概率。这可以从另一面——“概率”来帮助我们更深刻的理解期权。例如，平值期权的 Delta 为 0.5，表明随着到期日的临近，该期权最后变为实值的概率为 50%。

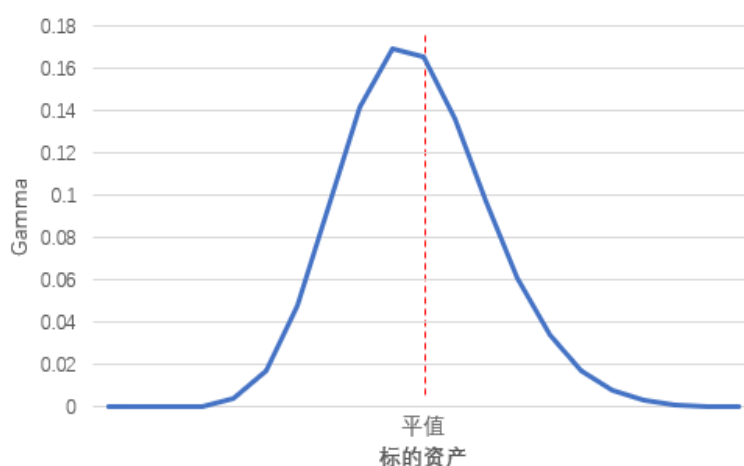
此外，Delta 最为重要的意义是：表示为了对冲期权头寸所需要持有标的资产的头寸。若买入看涨期权，此时的 Delta 为正，这时候就应该卖出标的资产进行对冲；若卖出看涨期权，此时 Delta 为负，这时应该买入标的资产进行对冲。若买入看跌期权，这时就应该买入标的资产进行对冲；若卖出看跌期权，这时就应该卖出标的资产进行对冲。

Gamma

Gamma 是期权或期权组合价格关于标的资产的二阶导数。因此根据 Delta 定义，可以得到 Gamma 还表示 Delta 关于标的资产的一阶导数。即它表示 Delta 对标的资产的敏感度，也可以理解为为了保持 Delta 中性所需要进行 Delta 对冲的速率。

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

图 3：Gamma 值随标的资产变化情况

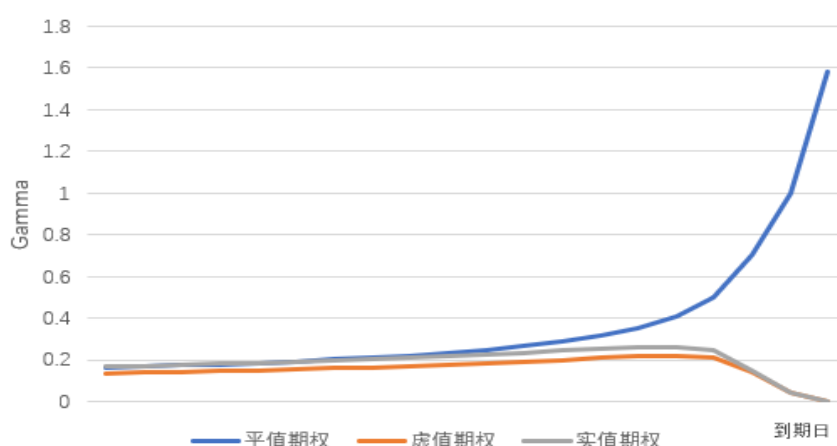


资料来源：方正中期研究院整理

从上图中可以看出，当标的资产在期权执行价附近震荡时，Gamma 相对较大，所以 Delta 的变化也较大，这意味着若要保持 Delta 中性，那么进行对冲将会变得非常的频繁。

下面我们看一下 Gamma 关于时间的变化。对于看涨期权来说，若我们固定标的资产价格 20 恒等于执行价 20，并且期权剩余期限逐渐减少。可以看到，Gamma 会不断增大，并趋向于无穷，会出现著名的“大头针（Pin Risk）风险”。但是若固定标的资产价格 30 大于执行价 20，那么随着期权剩余期限的减少，期权被执行的概率接近于 100%，此时 Delta 趋于稳定，Gamma 趋向于 0。类似地，若固定标的资产价格为 10 恒小于执行价 20，随着期权剩余期限的减少，Gamma 也逐渐趋于 0。

图 4：Gamma 值随时间变化情况



资料来源：方正中期研究院整理

此外，二阶导在物理中表示加速度的含义。在期权中，类似地，Gamma 可以看作期权价格随标的资产价格变动的加速度。由于 Gamma 恒为正，因此当标的资产价格上涨时，Delta 会加速上行，而当标的资产价格下降时，Delta 会减速下降。这种“放大收益、减缓损失”的特点对期权多头来说是有利的。显然，世界上没有免费的午餐，正因为有上述特性，期权的多头需要付出时间价值 Theta。

Theta

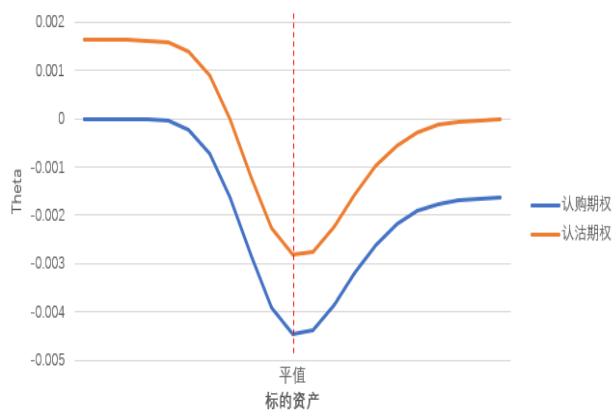
Theta 表示期权或期权组合价格关于时间的变化情况：

$$\Theta = \frac{\partial V}{\partial t}$$

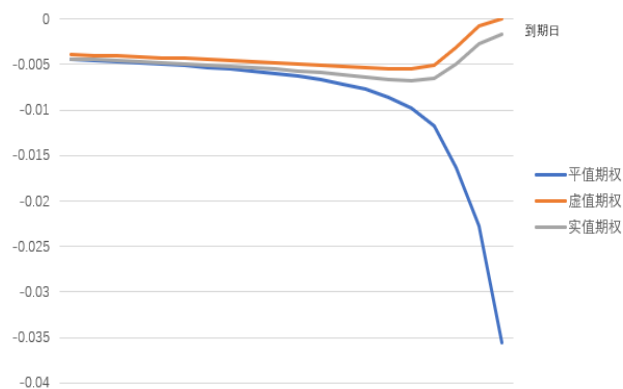
对于看涨期权来说，其 Theta 值恒为负数，所以期权价格随着时间推移会不断下降。对于看跌期权来说，情况些许不同，其 Theta 并不是恒为负的。事实上，可以证明当标的资产价格远低于执行价时，Theta 值是可以正的。

图 5：Theta 值随标的资产变化情况

图 6：Theta 值随时间变化情况



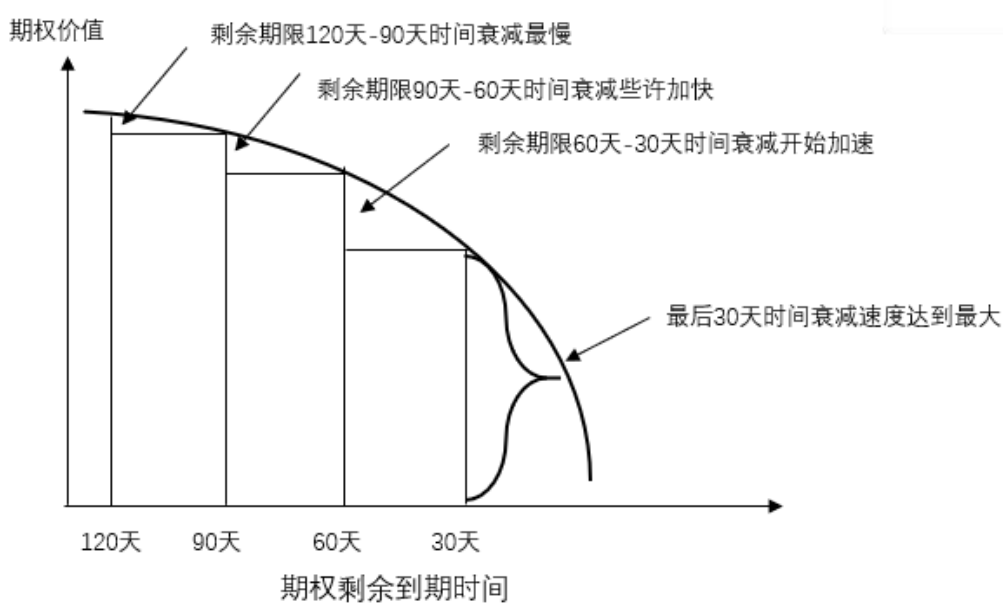
资料来源：方正中期研究院整理



资料来源：方正中期研究院整理

从上图还可以看到平值期权的 Theta 是最大的。并且随着到期日的临近，其衰减速度会加速，而虚值或实值期权会慢慢趋于 0。

图 7：期权时间价值衰减情况



资料来源：方正中期研究院整理

因此，若投资者认为未来市场处于一个平稳的阶段，这时就可以做卖方赚取时间价值。另外，如果市场处于横盘整理状态，一般情况下，标的资产的波动率将会有所下降，这时卖方还能赚取波动率 Vega 的收益。

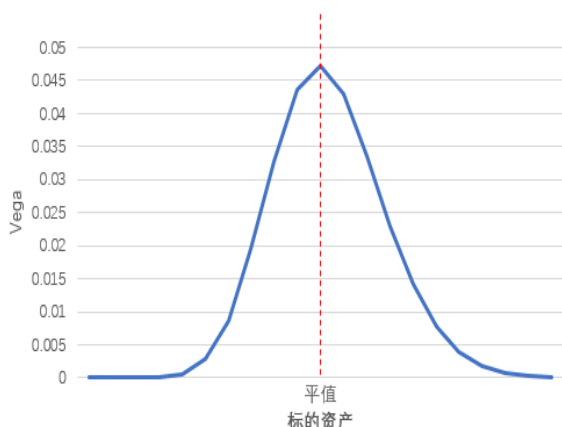
Vega

Vega 是期权或期权组合价格对波动率的敏感度：

$$\text{Vega} = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

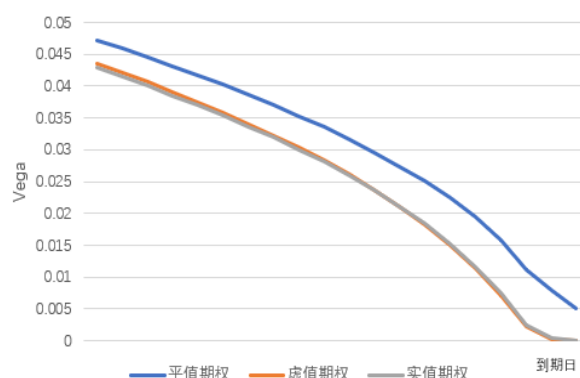
当波动率升高时，市场的不确定性将增加，标的资产涨到更高价格或跌到更低价格的可能性都将上升，因此无论对于看涨还是看跌期权来说，其价格也将越高。

图 8: Vega 随标的资产变化情况



资料来源：方正中期研究院整理

图 9: Vega 随时间变化情况



资料来源：方正中期研究院整理

从上图可以看到平值期权的 Vega 值是最大的，深度虚值或实值期权的 Vega 值接近于 0。此外，随着到期日的临近，平值、实值、虚值期权的 Vega 值都将减小，但平值期权衰减速度会稍慢些。

期权收益分解

在上文中，我们已经介绍各个希腊字母及性质。且有

$$\Delta V = \text{Delta} * \Delta S + \frac{1}{2} \text{Gamma} * (\Delta S)^2 + \text{Theta} * \Delta t + \text{Vega} * \Delta \sigma$$

下面我们用两个例子介绍其在日常风险管理中的应用。

图 10: 希腊字母解析解

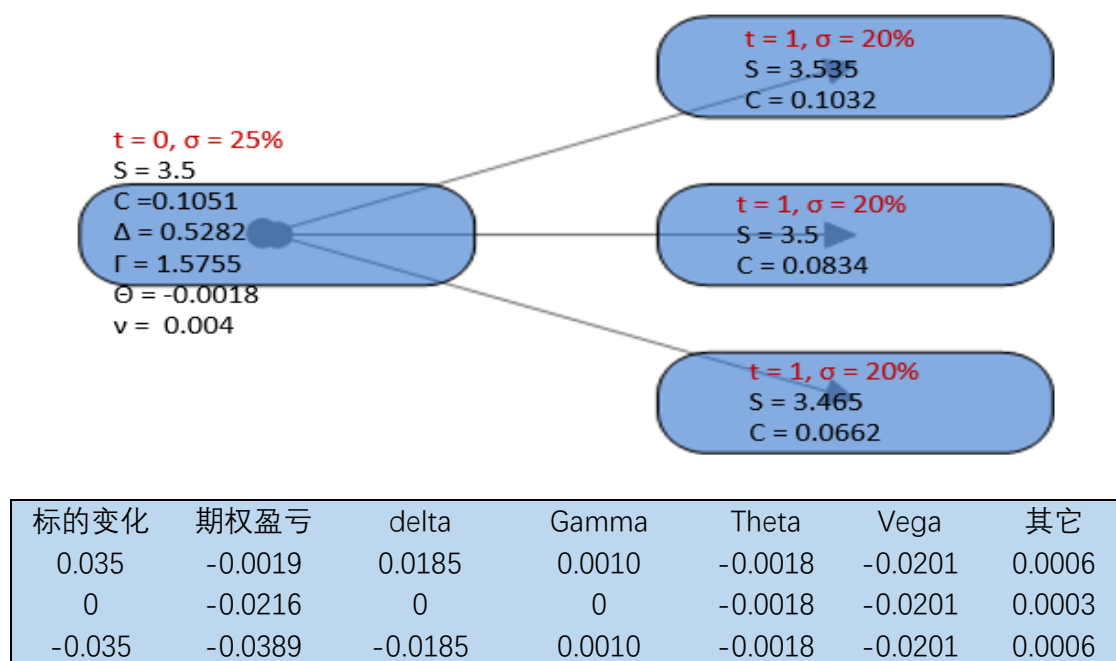
		Calls	Puts
Delta	$\frac{\partial C}{\partial S}$	$N(d_1)$	$-N(-d_1) = N(d_1) - 1$
Gamma	$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$	$\frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$	
Vega	$\frac{\partial C}{\partial \sigma}$	$SN'(d_1)\sqrt{T-t}$	
Theta	$\frac{\partial C}{\partial t}$	$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2)$
Rho	$\frac{\partial C}{\partial r}$	$K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$

资料来源：方正中期研究院整理

我们先看一个“看对方向仍亏损”的例子。

假设当前 50ETF 价格为 3.5。现有一看涨期权，执行价为 $K = 3.5$ ，波动率 $\sigma = 0.25$ ，剩余到期时间 $T = 30$ ，无风险利率 $r = 0.03$ 。

图 11：期权收益分解-“看对方向仍亏损”



资料来源：方正中期研究院整理

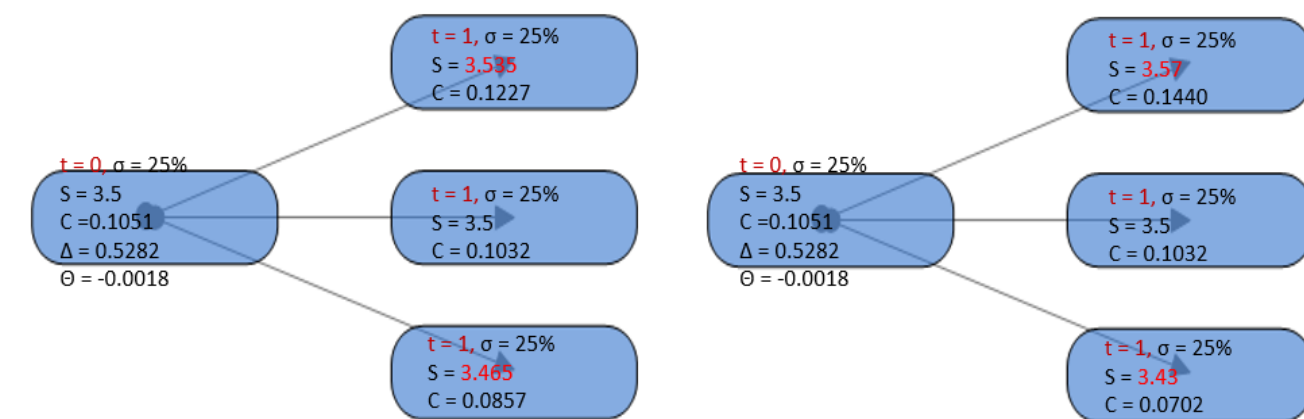
从表中可以看到当标的上涨 1%，波动率下降 5%时，期权合约下跌 0.0019，出现“看对方向仍亏损”的情况。从希腊字母的分解中可以看到，在方向上 Delta 的贡献是正的，但是由于隐波下降过大，多头在 Vega 上损失大于方向上的贡献，因此出现“看对方向仍亏损”。这也提示投资者，在期权隐波高位时，一定要谨慎单边买入期权。

最后我们再看一个 Delta 中性对冲的例子。

与之前相同，仍假设当前 50ETF 价格为 3.5。现有一看涨期权，执行价为 $K = 3.5$ ，波动率 $\sigma = 0.25$ ，剩余到期时间 $T = 30$ ，无风险利率 $r = 0.03$ 。

若投资者买入一份看涨期权，同时卖出 Delta 份标的对冲。

图 12: 期权收益分解-realized vol vs implied vol



标的变化	期权盈亏	对冲盈亏	总盈亏
0.0350	0.0176	-0.0185	-0.0009
0	-0.0018	0	-0.0018
-0.0350	-0.0193	0.0185	-0.0008

标的变化	期权盈亏	对冲盈亏	总盈亏
0.0700	0.0390	-0.0370	0.0020
0	-0.0018	0	-0.0018
-0.0700	-0.0348	0.0370	0.0022

资料来源：方正中期研究院整理

从图中可以得到，若标的波动 1%，无论标的上涨还是下跌，期权头寸加上对冲头寸最终都是负的。而当标的波动 2%，无论标的上涨还是下跌，期权头寸加上对冲头寸最终都是正的。虽然都是 Delta 中性对冲，但是标的波动幅度不同，一个是赚的，另一个却是亏的。这是什么原因？

当标的波动 1%，年化波动率为 $\sqrt{250} * 0.01 = 0.158$ ；当标的波动 2%，年化波动率为 $\sqrt{250} * 0.02 = 0.316$ 。期权隐含波动率为 0.25。由于整个头寸 Delta 为 0，因此，无论上涨还是下跌，整个头寸在 Delta 上的贡献均为 0。当标的实际波动率大于隐含波动率时，期权在 Gamma 上收益大于 Theta 的损耗，因此总盈亏是正的。而当标的实际波动率小于隐含波动率时，虽然 Gamma 上仍能赚钱，但小于 Theta 的损耗，因此最终总盈亏是负的。

从这个例子中可以得到，在 Delta 中性对冲过程中，当标的实际波动率大于期权隐含波动率，做多 Gamma 才能赚钱；而当标的实际波动率小于期权隐含波动率时，做空 Gamma 才能获取收益。

行方正 以致远

重要事项:

本报告中的信息均源于公开资料，仅作参考之用。方正中期研究院力求准确可靠，但对于信息的准确性及完备性不作任何保证，不管在何种情况下，本报告不构成个人投资建议，也没有考虑到个别客户特殊的投资目的、财务状况或需要，不能当作购买或出售报告中所提及的商品的依据。本报告未经方正中期研究院许可，不得转给其他人员，且任何引用、转载以及向第三方传播的行为均可能承担法律责任，方正中期期货有限公司不承担因根据本报告操作而导致的损失，敬请投资者注意可能存在的交易风险。本报告版权归方正中期所有。

行情预测说明:

涨：当周收盘价>上周收盘价；

跌：当周收盘价<上周收盘价；

震荡：（当周收盘价-上周收盘价）/上周收盘价的绝对值在 0.5%以内；

联系方式:

方正中期期货研究院

地址：北京市西城区展览路 48 号新联写字楼 4 楼

北京市朝阳区东三环北路 38 号院 1 号楼泰康金融大厦 22 层

电话：010-85881117

传真：010-68578687

邮编：100037
