股指期权专题报告

VIX 指数详解

专题报告

摘要：

VIX 在金融用语中一般指的是芝加哥期权交易所(CBOE)所编制的波动率指数，用于衡量未来 30 天的 S&P500 指数期权的隐含波动率。VIX 用年化百分比表示($VIX = \sigma \times 100$)。假如 VIX 当日为 25，则可以理解成市场期望未来 30 天市场波动率为 15%。然而，VIX 并不直接预测标的指数具体的走向。无论预期波动正负，VIX 值只体现波动的预期幅度。不过，对于应用波动率作为套利指标的 delta 对冲等策略，VIX 统合了市场期权的隐含波动率信息，有着一定的引导作用。

VIX 最初在 1993 年被 COBE 提出，一开始用于衡量 S&P100 30 天期望波动率。后来，VIX 成为首要美股波动率指标，被 CNBC，Bloomberg 等多家机构引用，冠名“恐慌指数”。2003 年，CBOE 与高盛更新 VIX 计算公式，改用 S&P500 作为隐含波动率计算中期权的标的指数，且不再依赖 BS 模型，转为 DDKZ 模型。脱离了 BS 模型，VIX 不再受制于 BS 模型的上下限，扩展了能作为计算“样本”的期权集合，VIX 变得更加可靠有意义。2004 年，CBOE 引入第一款场内 VIX 期货。2014 年，VIX 的计算引入 SPX Weeklys。标准的期权在每月第 3 个星期五到期， SPX weeklys 每周到期。计算样本的到期时间间隔更短，计算更精确。2016 年，CBOE 开始在美国交易时间以外公布 VIX 指数值 （美国交易时间：9:30 am – 4:15 pm，额外时间：3:00 am – 9:15am）[1]。

接下来，本文将从 VIX 的数学原理，VIX 的具体构造方式，以及 VIX 的误差 3 个方面解析 VIX 指数。

作者姓名：刘超

期货投资咨询资格编号：Z0012924

联系方式：

邮箱: liuchaoqh@csc.com.cn

电话:023-86769757

发布日期： 2020 年 7 月 10 日

报告体系

日报	每日 8 点 50 前发布
周报	每周一下午 5 点前发布
专题报告	不定期发布

一、VIX 的数学原理

VIX 的公式主要运用了 Demeterfi [5] 等人为"方差互换"衍生品的定价开发的公允未来方差公式(FVFV)。由这种方法计算的波动率又称为 DDKZ 波动率。首先，我们定义标的 S 服从随机过程：

$$dS_t = u_s S_t dt + \sigma_s S_t dw_t;$$

其中w_t是维纳过程；S_s是标的在时间点 t 的值；σ_s是波动率；u_s是标的的成长率。在无风险测度下，标的成长率u_s等于无风险利率 r。接下来，将等式两边同时除以S_t，我们得到：

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_s dw_t$$

同时，引入 ito 定理，可以求解：

$$\begin{aligned} dlnS_t &= \left(\frac{\partial lnS_t}{\partial t}dt + \frac{\partial lnS_t}{\partial S_t} rS_t dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 lnS_t}{\partial S_t^2}\sigma_s^2 S_t^2 dt\right) + \sigma\frac{\partial lnS_t}{\partial S_t}S_t dw_t \\ &= \left(r - \frac{1}{2}\sigma_s^2\right)dt + \sigma_s dw_t \end{aligned}$$

可以注意到，前后两个式子之间只差一个$\frac{1}{2}\sigma_s^2 dt$。对两个式子做差可以得到：

$$\frac{1}{2}\sigma_s^2 dt = \frac{dS_t}{S_t} - dlnS_t$$

对式子从 0 到 T 积分，可以得到 0 到 T 年化平均波动率为：

$$\int_0^T \frac{1}{2}\sigma_s^2 dt = \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - dlnS_t$$

$$\sigma_{0:T}^2 = \frac{2}{T}\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - dlnS_t$$

将原式对不同轨迹做期望可以得到：

$$E[\sigma_{0:T}^2] = \frac{2}{T}E\left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - dlnS_t\right]$$

其中：

$$E\left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}\right] = \int_0^T E\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] = \int_0^T E\left[rdt + \sigma_s dw_t\right] = \int_0^T rS_t dt = rT$$

$$E\left[\int_0^T dlnS_t\right] = E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right]$$

对于$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$，我们定义一个 S*：

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = \ln\left(\frac{S_T}{S_*}\right) + \ln\left(\frac{S_*}{S_0}\right)$$

由 Carr and Madan (1998)[2]可知：

$$f(S) = f(k) + f'(k)(S-k) + \int_0^k f''(K)(K-S)^+ dK + \int_k^\infty f''(K)(S-K)^+ dK$$

令 f(S)=ln($\frac{S}{S_*}$):

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_*}\right)=\ln\left(\frac{S_*}{S_*}\right)+\frac{1}{S_*}(S_T-S_*)+\int_0^{S_*}-\frac{(K-S_T)^+}{K^2}dK+\int_{S_*}^{\infty}-\frac{(S_T-K)^+}{K^2}dK$$

$$E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right]=E[\ln\left(\frac{S_*}{S_0}\right)+\frac{1}{S_*}(S_T-S_*)+\int_0^{S_*}-\frac{(K-S)^+}{K^2}dK+\int_{S_*}^{\infty}-\frac{(S-K)^+}{K^2}dK]$$

由无风险套利定价模型可知，$E[S_T]=e^{rT}S_0$，所以：

$$E\left[\ln\left(\frac{S_*}{S_0}\right)+\frac{1}{S_*}(S_T-S_*)\right]=\ln\left(\frac{S_*}{S_0}\right)+\frac{E[S_T]-S_*}{S_*}=\ln\left(\frac{S_*}{S_0}\right)+\frac{e^{rT}S_0}{S_*}-1$$

再由看涨期权，看跌期权定义，以及期望损益公式可得：

$$E\left[\int_0^{S_*}-\frac{(K-S_T)^+}{K^2}dK+\int_{S_*}^{\infty}-\frac{(S_T-K)^+}{K^2}dK\right]$$
$$=-e^{rT}\left[\int_0^{S_*}\frac{e^{-rT}\ E[(K-S_T)^+]}{K^2}dK+\int_{S_*}^{\infty}\frac{e^{-rT}E[(S_T-K)^+]}{K^2}dK\right]$$
$$=-e^{rT}\left[\int_0^{S_*}\frac{P(K)}{K^2}dK+\int_{S_*}^{\infty}\frac{C(K)}{K^2}dK\right]$$

合并起来，原式子可以改写为：

$$E[\sigma_{0:T}^2]=\frac{2}{T}\left[rT-\ln\left(\frac{S_*}{S_0}\right)-\left(\frac{e^{rT}S_0}{S_*}-1\right)+e^{rT}\left[\int_0^{S_*}\frac{P(K)}{K^2}dK+\int_{S_*}^{\infty}\frac{C(K)}{K^2}dK\right]\right]$$

到这里，我们已经求出了未来 T 时间内年化期望波动率的数学推导式。然而，为了符合实际使用的数据环境，这个公式还需要做一些简化和近似化。比如，现实中我们是无法做到积分的，并且，行权价不连续，T 也不一定等于 30 天。首先，我们使用泰勒展开式对前面 3 项进行化简。由无风险套利模型可知：

$$F_0=e^{rT}S_0$$

$$E\left[rT-\ln\left(\frac{S_*}{S_0}\right)\right]=\ln\left(\frac{F_0}{S_*}\right)$$

$$\ln\left(\frac{F_0}{S_*}\right)=\ln\left[\left(\frac{F_0}{S_*}-1\right)+1\right]\approx\left(\frac{F_0}{S_*}-1\right)-\left(\frac{F_0}{S_*}-1\right)^2$$

$$rT-\ln\left(\frac{S_*}{S_0}\right)-\left(\frac{e^{rT}S_0}{S_*}-1\right)-=\left(\frac{F_0}{S_*}-1\right)-\left(\frac{F_0}{S_*}-1\right)^2-\left(\frac{F_0}{S_*}-1\right)=-\left(\frac{F_0}{S_*}-1\right)^2$$

对于后面的积分项，我们采用累加近似。由于不存在行权价等于正无穷或者 0 的期权，我们用 K_u 代替正无穷，用 K_0 代替 0。K_u 与 K_0 分别代表用于计算的期权样本的行权价的上下限。所以，原式子可以改写为：

$$\int_0^{S_*}\frac{P(K)}{K^2}dK+\int_{S_*}^{\infty}\frac{C(K)}{K^2}dK=\sum_{K_L}^{K_H}\frac{\Delta K_i}{K_i^2}Q(K_i)$$

这里的$Q(K_i)$代表对应期权的价格。在实际操作中，这里的“价格”指的是买卖价格的中间价。由刚刚的推导

可以得知。当 K>S*时，Q 为看涨期权价格的价格；当 K<S*时，Q 为看跌期权的价格。将化简于近似化后的公式代入原式子，期望波动率公式可以重写为：

$$E[\sigma_{0:T}^2] \approx \frac{2}{T}\left[e^{rT}\sum_{K_L}^{K_H}\frac{\Delta K_i}{K_i^2}Q(K_i) - \frac{1}{2}(\frac{F_0}{S_*} - 1)^2\right]$$

推导完毕。

二、Carr and Madan (1998)变换的推导

在刚刚的推导中，我们用到了一个由 Carr 和 Madan [2]推导出的变换公式。这个变换公式的证明稍微有点繁琐。为了不损害推导的连续性，我们把它单独放到这里来推导。首先，为了证明这个变换，我们要引入一种函数 – 狄拉克函数$\delta(x)$。严格的狄拉克函数其实并不存在，不过可以把他看作某些函数的近似，比如：

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{a\sqrt{\pi}}e^{-\frac{x^2}{a^2}}$$

在实际应用中，我们只需要知道他的性质就可以了：

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases};\text{所以，}\int \delta(x)dx = 1\text{，}\int f(x)\delta(x_0 - x)dx = f(x_0)$$

应用狄拉克函数的性质，我们可以对任意满足二次可导的函数进行如下的变换：

$$\forall K \geq 0; f(S) = \int_0^\infty f(K)\delta(S-K)dK = \int_0^k f(K)\delta(S-K)dK + \int_k^\infty f(K)\delta(S-K)dK$$

$$= \underbrace{\int_0^k f(K)\delta(K-S)dK}_{I_1} + \underbrace{\int_k^\infty f(K)\delta(S-K)dK}_{I_2}$$

注意，狄拉克函数是关于 0 对称的，所以$f(K)\delta(S-K) = f(K)\delta(K-S)$。接下来对等式 I_1, I_2 分别"分部积分"：

$$I_1 = \int_0^k f(K)\delta(K-S)dK = f(K)1_{K>S}|_{0:k} - \int_0^k f'(K)1_{K>S}dK$$

$$I_2 = \int_k^\infty f(K)\delta(S-K)dK = -f(K)1_{S>K}|_{k:\infty} + \int_k^\infty f'(K)1_{S>K}dK$$

由于通常标的 S 是正数，所以$1_{0>S}$可以记为 0。同样的，$1_{S>\infty}$也可以记为 0。于是有了以下化简。

$$f(K)1_{K>S}|_{0:k} = f(K)1_{k>S} - f(K)1_{0>S} = f(K)1_{k>S}$$

$$-f(K)1_{S>K}|_{k:\infty} = -(f(K)1_{S>\infty} - f(K)1_{S>k}) = f(K)1_{S>k}$$

将上述公式的展开代入原公式，由于$f(K)1_{S>k} + f(K)1_{k>S} = f(S)$，我们可以将原等式重写为：

$$f(S)=f(K)1_{k>S}-\int_0^k f'(K)1_{K>S}dK+f(K)1_{S>k}+\int_k^\infty f'(K)1_{S>K}dK$$
$$=f(K)-\underbrace{\int_0^k f'(K)1_{K>S}dK}_{I_3}+\underbrace{\int_k^\infty f'(K)1_{S>K}dK}_{I_4};$$

同样的，对等式 I_3, I_4 分别分部积分：

$$I_3=\int_0^k f'(K)1_{K>S}dK=f'(K)(K-S)^+|_{0:k}-\int_0^k f''(K)(K-S)^+dK$$
$$I_4=\int_k^\infty f'(K)1_{S>K}dK=-f'(K)(S-K)^+|_{k:\infty}+\int_k^\infty f''(K)(S-K)^+dK$$

类比之前的推导，不难理解$(0-S)^+=(S-\infty)^+=0$

$$f'(K)(K-S)^+|_{0:k}=f'(K)[(k-S)^+-(0-S)^+]=f'(K)(k-S)^+$$
$$-f'(K)(S-K)^+|_{k:\infty}=-f'(K)[(S-\infty)^+-(S-k)^+]=f'(K)(S-k)^+$$

同样，将简化过后的公式代入原公式，原公式可以改写为：

$$f(S)=f(K)+f'(K)((S-k)^+-(k-S)^+)+\int_0^k f''(K)(K-S)^+dK+\int_k^\infty f''(K)(S-K)^+dK$$
$$=f(K)+f'(K)(S-k)+\int_0^k f''(K)(K-S)^+dK+\int_k^\infty f''(K)(S-K)^+dK$$

证明完毕。

三、VIX 指数构造

由一系列的推导，我们得知，最终的波动率计算公式为：

$$\sigma_{ddkz}^2=E[\sigma_{0:T}^2]\approx\frac{2}{T}\left[e^{rT}\sum_{K_L}^{K_H}\frac{\Delta K_i}{K_i^2}Q(K_i)-\frac{1}{2}(\frac{F_0}{K_0}-1)^2\right]$$

而 VIX= $\sigma_{ddkz}\times100$。为了计算 VIX，我们需要获取，计算或者近似估算的信息如下：

表 1：VIX 计算所需参数列表

T	到期时间
F	远期指数值
K_0	中心成交价，第一个低于远期指数值的成交价
K_i	按价格从低（高）到（低）高的第 i 个价外看跌（涨）期权
ΔK_i	（K_{i+1}-K_{i-1}）/2
R	无风险利率

$Q(K_i)$	买卖中间价

接下来，我们一步一步讲解如何得到上表的信息。

3.1 关于 T 的计算

首先，距离到期的时间间隔 T 是一个标准化后的值。所谓的标准化是指以一年为单位时间时，T 对应的值。为了精确计算 T，VIX 在 T 的计算中使用的是分钟级的数据，其公式可以写为：

$$T = (M_{current} + M_{settle} + M_{other})/M_{one\ year}$$

其中，$M_{current}$，M_{settle}，M_{other} 分别代表了当前时间点到今天凌晨 12：00 之间的分钟数，到期日当天 0：00 到合约到期时间点之间的分钟数，当前日期晚 12：00（第二日 0：00）到到期日当天 0：00 之间的分钟数 [1]。由于 VIX 指数的计算中使用了 2 类期权，一种是每个月第三个星期五到期的标准期权，另一类是每周星期五（也存在每周其他时间到期的 SPXW）结算的“SPX weeklys” 期权。 前者在结算日开盘（9：30 am）时间到期，后者在结算日收盘时间到期 （4：00 pm）。所以，对待两种期权，T 的计算不完全相同。但是，无论对于哪种期权，时间长度 T 成分一致，都由 3 个部分组成。

T 的长短也决定了用于计算 VIX 的期权样本集。VIX 将使用的两种期权的到期日限制在未来 23~37 天之间。一种是未来 23~30 天之间，一种是未来 30~37 天，采用轮替更换制（这里，我们用临期指代到期日较近的合约；用下期代指到期日较远的合约）。当临期合约的到期日进入到 23 天以内，下期合约的到期日也刚好进入到 30 天以内。这时，我们用下期合约取代临期合约作为新的临期合约使用，并另选到期日在 30~37 天的新合约加入计算 [1]。

下面举一个例子。

例：现在 9:46 am，临期期权为标准期权，结算在 24 天以后。下期期权为 weeklys。结算在 31 天后（1 与 2 的下标分别指代临期合约与下期合约对饮的值）。

$$M_{curr} = 14+14 \times 60=854$$

$$M_{settle1} = 30 + 9 \times 60 = 570$$

$$M_{settle2} = 16 \times 60=960$$

$$M_{Other1} = 24 \times 60 \times 24 = 34{,}560;$$

$$M_{Other2} = 24 \times 60 \times 31 = 44{,}640$$

$$\text{一年总分钟} = 365 * 60 * 24 = 525{,}600$$

所以：

$$T1 = \frac{854 + 570 + 34{,}560}{525{,}600} = 0.0684627$$

$$T2 = \frac{854 + 960 + 44{,}640}{525{,}600} = 0.0883828$$

3.2 远期指数 F 与中心行权价$\boldsymbol{K_0}$的选择

在刚刚的公式推导中，我们发现，VIX 以S_*为分割点确定要使用的看涨看跌期权的行权价范围。理想状况下，行权价连续，应该让分割点与远期相等。如此一来 DDKZ 计算公式与 Britten-Jones 与 Neuberger [6] 的公式完全一致，省去了$\ln(\frac{S_*}{S_0})$等 3 项。这不仅增加了参与计算的期权量，减少了泰勒展开带来的误差，同时公式的可靠性也被 BJN(2000)增强。然而，现实中，行权价不连续，我们只能要求两者尽可能接近，无法做到相等。由 put-call-parity 可知：当看涨看跌期权价格相差最小的时候，两者最接近：

$$F - K = e^{rT}(C - P)$$

选用这时的 K 作为 K_0，往两边展开寻找用于计算的期权样本集。例如：

表 2：期权买卖价格信息例子

Near Term Options			
Strike Price	Call	Put	Difference
1940	38.45	15.25	23.20
1945	34.70	16.55	18.15
1950	31.10	18.25	12.85
1955	27.60	19.75	7.85
1960	24.25	21.30	2.95
1965	21.05	23.15	2.10
1970	18.10	25.05	6.95
1975	15.25	27.30	12.05
1980	12.75	29.75	17.00

数据来源：CBOE[1], 中信建投期货

当成交价为 1965 时，看涨与看跌期权价格差以最小，此时计算远期 SPX 指数值为：

$$F = K + e^{rT} \times (C - P) = 1965 + e^{0.000305 \times 0.0683486} \times (21.05 - 23.15) = 1962.90$$

所以，临期合约的远期指数价格为 1962.90，同时，根据 VIX 的规则，稍低于 1962.90 的行权价 1960 被选为 K_0 [1]。

3.3 期权价格与ΔK_i 的计算

在 DDKZ 公式里，$Q(K_i)$ 指的是备选期权的价格。由于实际交易存在多个价格，VIX 构建时使用的是

对应行权价对应合约买方卖方中间价。一般，一个行权价对应一个期权。当K_i大于 K_0时，$Q(K_i)$是对应行权价看涨合约的买卖中间价。当K_i小于 K_0时，$Q(K_i)$是对应行权价看跌合约的买卖中间价。当成交价为K_0时，看涨看跌期权使用同一个价格。所以$Q(K_0)$是行权价为K_0的看涨合约卖方报价，看涨合约买方报价，看跌合约卖方报价，看跌合约买方报价，四种价格的平均数。例如在 1960，对应价格为(23.4+25.1+20.6+22)/4 = 22.775）[1]。

ΔK_i 是用累加近似积分时用于替代 dK 所用的值。VIX 构建中，ΔK_i 是期货成交价列表对应位置上一位与下一位行权价之差的一半（如：1375 对应的ΔK_i 是(1380-1370)/2=5）。如果行权价处于行权价范围的边缘（K_u 或者 K_0），比如 1965。K_i 就是他与相邻行权价的间隔（K_i=1965-1960=5）[1]。

表 3：参数 Q 与ΔK 计算示例

行权价	看涨		看跌		平均	类别	K_i
	Bid	Ask	Bid	Ask			
1950	30.1	32.1	17.7	18.8	18.25	看跌	5
1955	26.7	28.5	19	20.5	19.75	看跌	5
1960	23.4	25.1	20.6	22	22.775	单个价格同时代表看涨看跌	5
1965	20.3	21.8	22.3	24	21.05	看涨	5

数据来源：CBOE[1], 中信建投期货

3.4 计算 DDKZ 波动率

VIX 构建中 R 代指无风险利率，通过在美国国债的收益率曲线中使用三次样条插值寻找对应到期时间 T 的收益率获得 [1]。至此，所需信息已全部获得。因此，σ^2已经可以计算。

$$\sigma^2 = \frac{2}{T}\sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T}[\frac{F}{K_0} - 1]^2$$

下表列出了部分合约单个合约对 DDKZ 波动率贡献的计算结果

表 4：单只期权 DDKZ 波动率贡献计算示例

行权价	类型	中间价	ΔK_i	时间	远期	无风险利率	(ΔK_i)/(K_i^2) e^RT Q(K_i)	1/T 〖[F/K_0 −1]〗^2
1940	看跌	15.25	5	0.068463	1962.9	0.000305	0.0000202603	0.00003197642
1945	看跌	16.55	5	0.068463	1962.9	0.000305	0.0000218745	0.00003197642
1950	看跌	18.25	5	0.068463	1962.9	0.000305	0.0000239979	0.00003197642
1955	看跌	19.75	5	0.068463	1962.9	0.000305	0.0000258376	0.00003197642
1960	看涨/看跌	24.25	5	0.068463	1962.9	0.000305	0.0000315630	0.00003197642
1965	看涨	21.05	5	0.068463	1962.9	0.000305	0.0000272588	0.00003197642
1970	看涨	18.1	5	0.068463	1962.9	0.000305	0.0000233198	0.00003197642
1975	看涨	15.25	5	0.068463	1962.9	0.000305	0.0000195486	0.00003197642

数据来源：CBOE[1]，中信建投期货

对贡献项求和，（ $\frac{\Delta K_i}{K_i^2}e^{RT}Q(K_i)$ ）乘以$\frac{2}{T}$，减去尾项（ $\frac{1}{T}[\frac{F}{K_0}-1]^2$ ）最后得：

$$\sigma_{DDKZ}^2=\frac{2}{T}\sum_i\frac{\Delta K_i}{K_i^2}e^{RT}Q(K_i)\ -\ \frac{1}{T}\left[\frac{F}{K_0}-1\right]^2\ =\ 0.018495\ -\ 0.0000319755\ =\ 0.018463$$

3.5 线性插值

CBOE 提出 VIX 的最终目的是为了计算代表美股未来 30 日市场波动的期望波动率，但是无论采用临期合约还是下期合约，所计算出的波动率均非未来 30 日的平均波动。为了估算 30 天标准的市场期望波动率，VIX 通过线性插值的方法将采用临期，下期合约计算出的两种波动率合二为一 [1]。下面，假设通过计算最后所得到的参数值如下：

$$VIX=100\times\sqrt{\{T_1\sigma_1^2\left[\frac{N_{T_2}-N_{30}}{N_{T_2}-N_{T_1}}\right]+T_2\sigma_2^2[\frac{N_{30}-N_{T_1}}{N_{T_2}-N_{T_1}}]\}\times\frac{N_{365}}{N_{30}}}$$

σ_1^2：近期 DDKZ 波动率 0.018464177；

σ_2^2：下期 DDKZ 波动率 0.018813659

NT1：到近期期权成交的分钟数 35,924；

NT2：到下期期权成交的分钟数 46,394

N30：30 天的分钟数 43,200；

N365：一年的分钟数 525,600

代入公式：

$$VIX = 100 \times \sqrt{\left\{0.06846 * 0.01846\left[\frac{46{,}394\ -\ 43{,}200}{46{,}394\ \text{-}35{,}924}\right] + 0.08838 * 0.01881\left[\frac{43{,}200 - 35{,}924}{46{,}394 - 35{,}924}\right]\right\} \times \frac{525{,}600}{43200}}$$
$$= 13.69$$

四、VIX 的误差

上一节介绍了 VIX 在实际应用中的构造方案。可以发现，为了使得 VIX 的计算符合实际数据的特征，VIX 在公式上做了很多妥协，也就导致了误差的产生。

4.1 消减积分区间导致的误差[4]

$$\int_0^{K_0} \frac{P(T,K)}{K^2}dK + \int_{K_0}^{\infty} \frac{C(T,K)}{K^2}dK \approx \int_{K_L}^{K_0} \frac{P(T,K)}{K^2}dK + \int_{K_0}^{K_U} \frac{C(T,K)}{K^2}dK.$$

理想状态下原公式是需要从 0 积分到正无限。但是，股指期权市场中并没有行权价为 0 或者正无穷的期权，并且，在行权价贴近 0 或正无穷的过程中，虚值期权价值也会贴近 0，变得没有意义。所以 VIX 引入了舍弃行权价为 K_u 以上或 K_0 以下合约的规则。将行权价为 K_u 以上或 K_0 以下合约的潜在贡献值积分，可以得到，这个操作造成的误差大小为：

$$\delta_{trunc} = -\frac{2}{T}\exp(rT)\left[\int_0^{K_L} \frac{P(T,K)}{K^2}dK + \int_{K_U}^{\infty} \frac{C(T,K)}{K^2}dK\right].$$

4.2. 用累加拟合积分导致的误差[4]

$$\int_{K_L}^{K_0} \frac{P(T,K)}{K^2}dK + \int_{K_0}^{K_U} \frac{C(T,K)}{K^2}dK \approx \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2}Q(T,K_i).$$

现实中无法进行积分操作，只能通过累加去拟合积分操作。这种拟合距离真实的积分是有误差的，只能通过减少数据间的间隔来缩小。这部分误差的大小为：

$$\delta_{disc}=\frac{2}{T}\exp(rT)\left\{\sum_i\frac{\Delta K_i}{K_i^2}Q(T,K_i)-\left[\int_{K_L}^{K_0}\frac{P(T,K)}{K^2}dK+\int_{K_0}^{K_U}\frac{C(T,K)}{K^2}dK\right]\right\}.$$

4.3 泰勒展开带来的误差[3]

$$\frac{2}{T}\left\{rT-\left[\frac{S_0}{K_0}\exp(rT)-1\right]-\ln(K_0/S_0)\right\}\approx-\frac{1}{T}\left(\frac{F_0}{K_0}-1\right)^2.$$

在之前的计算中，为了消减公式中的项，我们使用了泰勒展开。泰勒展开也会导致误差，但通过使 S* 贴近 F 值，这个上面这个项以及它所带来的误差是可以完全消去的。并且，当S^*与F_0一致的时候，DDKZ 公式与 BJN-MFIV（Britten-Jones and Neuberger (2000)）[6]模型的结果完全一致（MFIV 中本没有 S*的概念），可靠性更佳。这部分误差的大小为：

$$\delta_{\exp}=\frac{2}{T}\left\{\left[\left(\frac{F_0}{K_0}-1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{F_0}{K_0}-1\right)^2\right]-\ln(F_0/K_0)\right\}.$$

4.4 线性插值法带来的误差[3]

$$\hat{\sigma}_{vix}^2(T_0)=\frac{1}{T_0}\left[\omega T_1\sigma_{vix}^2(T_1)+(1-\omega)T_2\sigma_{vix}^2(T_2)\right]$$

$$\omega=\frac{T_2-T_0}{T_2-T_1}$$

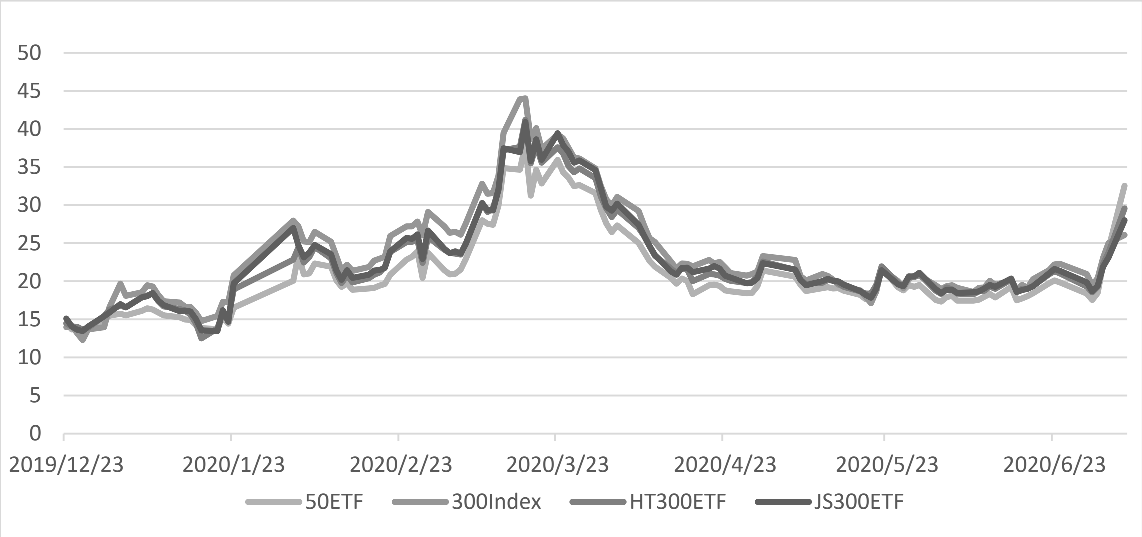
因为真实市场中 30 天到期的期权不是一直存在的，只能通过线性插值法用到期日早于 30 天的波动率与到期日晚于 30 天的波动率去估算。这种估算也会带来误差。这部分误差的大小为：

$$\delta_{int}=\hat{\sigma}_{vix}^2(T_0)-\sigma_{vix}^2(T_0)$$

五、国内四种主要金融期权的 VIX 计算结果

由于国内衍生品市场并不存在每周结算的期权，且价格不会跌到 0。为了适应国内市场的现状，我们对 VIX 的构建过程进行了一些细节上的更改。在筛选期权的时候，我们采用最近结算的两个合约，然后使用线性插值使得计算出的波动率对应的到期时间为 30 天。如果最近结算的合约到期日不足 5 天，则滚动到下两个最近结算的合约。另外，我国金融衍生品设有最低价格，也就是说，公允价值低于最低价格时在数据上无法显示。如果公允价值低于最低价格，则结算价不再有效地反应隐含波动率，故，本文不使用收盘价为最低价格的合约进行计算。

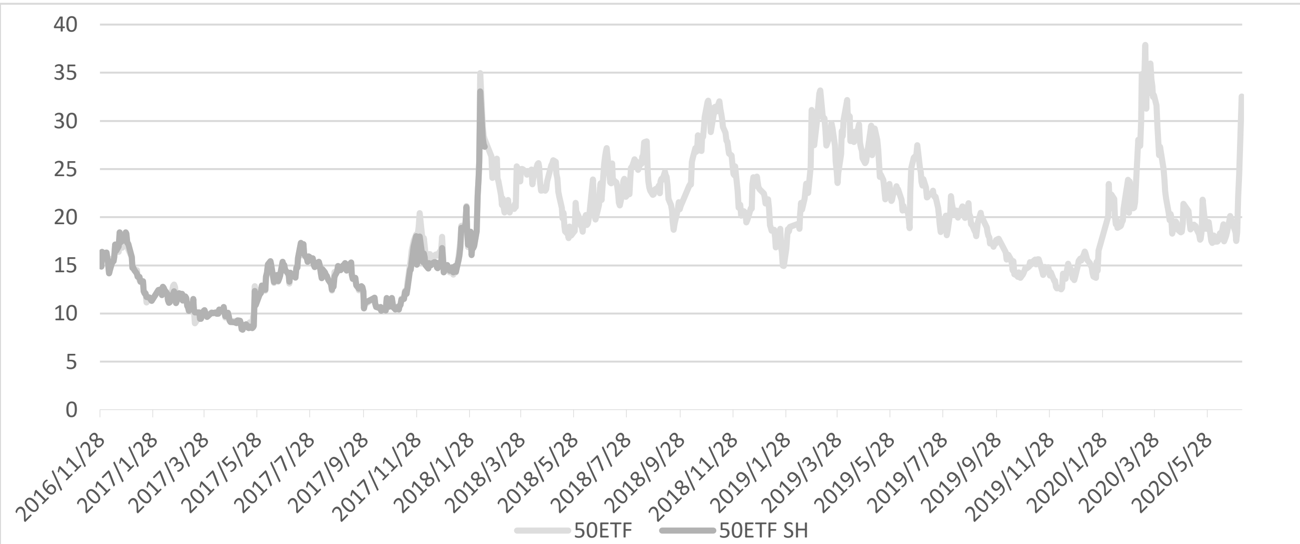
图 1：国内四种主要金融期权的 VIX



数据来源：WIND，中信建投期货

上图展示了国内四种主要金融期权的 VIX 计算结果，可以看到，300 股指期权，两种 300ETF 期权虽然价格量级不同，但是 VIX 计算结果基本一致。50ETF 期权的 VIX 略低于 300ETF 期权与 300 股指期权。

图 2：基于以上算法得出的 50ETF 期权 VIX 指数与中国波指对比



数据来源：WIND，中信建投期货

2016 年 11 月 28，上交所发布过 50ETF 的 VIX 指数，遗憾的是，该指数在 2018 年 2 月戛然而止。上图为我们计算的结果与上交所发布的数值的对比图，可以看到，两者差距细微，基本相同。

参考文献

[1] Cboe Exchange, Inc, (2019). White Paper Cboe Volatility Index®, Retrieved from: http://www.cboe.com/framed/pdfframed?content=/micro/vix/vixwhite.pdf&section=SEC_INSTITUTIONAL_PRODUCTS&title=Cboe%20Volatility%20Index%20-%20VIX%20White%20Paper%0D%0A

[2] Carr and D. Madan. Towards a theory of volatility trading. In E. Jouini, J. Cvitanic, and M. Musiela, editors, Option Pricing, Interest Rates, and Risk Management, pages 417–427. Cambridge University Press, 1998.

[3] Heinonen, A. (2013), The fear gauge, Retrieved from: http://hdl.handle.net/10138/39870

[4] Jiang, G. J., & Tian, Y. S. (2006). Extracting Model-Free Volatility from Option Prices: An Examination of the Vix Index. SSRN Electronic Journal, 14(3). doi:10.2139/ssrn.880459

[5] K. Demeterfi, E. Derman, M. Kamal, and J. Zou. More than you ever wanted to know about volatility swaps. Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, 1999.

[6] M. Britten-Jones and A. Neuberger. Option prices, implied price processes, and stochastic volatility. Journal of Finance, 55(2):839–866, 2000.

联系我们

中信建投期货总部

重庆市渝中区中山三路107号皇冠大厦11楼

电话：023-86769605

上海分公司

地址：上海市自贸试验区浦电路 490 号，世纪大道 1589 号 8 楼 10-11 单元

电话：021-68765927

湖南分公司

地址：长沙市芙蓉区五一大道 800 号中隆国际大厦 903 号

电话：0731-82681681

南昌营业部

地址:南昌市红谷滩新区红谷中大道998号绿地中央广场A1#办公楼-3404室电话：0791-82082701

河北分公司

地址：河北省廊坊市广阳道吉祥小区北门 11 号（建业大厦东行 100 米）

电话：0316-2326908

漳州营业部

地址：漳州市龙文区万达写字楼 B 座 1203

电话：0596-6161566

合肥营业部

地址：安徽省合肥市马鞍山路 130 号万达广场 6 号楼 1903-1905 室

电话：0551-62876855

西安营业部

地址：陕西省西安市高新区高新路 56 号电信广场裙楼 6 层 6G

电话：029-89384301

北京朝阳门北大街营业部

地址：北京市东城区朝阳门北大街 6 号首创大厦 207 室

电话：010-85282866

宁波分公司

地址：浙江省宁波市鄞州区和济街 180 号国际金融服务中心 1809-1810

电话：0574-89071687

北京北三环西路营业部

地址：北京市海淀区中关村南大街 6 号中电信息大厦 9 层 912

电话：010-82129971

太原营业部

地址：山西省太原市小店区长治路 103 号阳光国际商务中心 A 座 902 室

电话：0351-8366898

北京国贸营业部

地址：北京市朝阳区光华路 8 号和乔大厦 A 座向东 20 米

济南分公司

地址：济南市历下区泺源大街 150 号中信广场 A 座六层 611、613 室

电话：0531-85180636

大连分公司

地址：辽宁省大连市沙河口区会展路 129 号大连国际金融中心 A 座大连期货大厦 2901、2904、2905、2906 室

电话：0411-84806305

河南分公司

地址：郑州市金水区未来大道 69 号未来大厦 2205、2211、1910 室

电话：0371-65612356

广州东风中路营业部

地址：广州市越秀区东风中路 410 号时代地产中心 20 层自编 2004-05 房

电话：020-28325302

重庆龙山一路营业部

地址：重庆市渝北区龙山街道龙山一路 5 号扬子江商务小区 4 幢 24-1

电话：023-88502030

成都营业部

地址：成都武侯区科华北路 62 号力宝大厦南楼 1802,1803

电话：028-62818708

深圳分公司

地址:深圳福田区车公庙 NEO 大厦 A 栋 11 楼 I 单元

电话：0755-33378736

杭州分公司

地址：杭州市江干区国际时代广场 3 号楼 702 室

电话：0571-28056982

上海徐汇营业部

地址：上海市徐汇区斜土路 2899 号 1 幢 1601 室

电话：021-33973869

武汉营业部

地址：武汉市武昌区中北路 108 号兴业银行大厦 3 楼

电话：027-59909520

南京营业部

地址：南京市玄武区黄埔路 2 号黄埔大厦 11 层 D1 座、D2 座

电话：025-86951881

广州黄埔大道营业部

地址：广州市天河区黄埔大道西 100 号富力盈泰广场 B 座 1406

电话：020-22922100

上海浦东营业部

地址：上海浦东新区世纪大道 1777 号 3 楼 F1 室

电话：021-68597013

重要声明

全国统一客服电话：400-8877-780

网址：www.cfc108.com